

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королёва»
(Самарский университет)

Институт естественнонаучный
Факультет физический
Кафедра общей и теоретической физики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**«РОЖДЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ J/ψ МЕЗОНОВ
ПРИ ЭНЕРГИИ КОЛЛАЙДЕРА NICA»**

по направлению подготовки 03.04.02 Физика
(уровень магистратуры)
направленность (профиль) «Квантовые системы и квантовые технологии»

Обучающийся _____ К. К. Шиляев

Руководитель ВКР

д.ф.-м.н., профессор _____ В. А. Салеев

Самара 2024

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Теория сильного взаимодействия	5
1.1 Квантовая хромодинамика	5
1.2 НРКХД	8
Глава 2. Модели факторизации	14
2.1 Коллинеарная партонная модель	14
2.2 Обобщённая партонная модель	17
Глава 3. Результаты вычислений	21
3.1 Рождение неполяризованных чармониев	21
3.2 Поляризация в системе спиральности чармония	30
Заключение	33
Список литературы	34
Приложение. Программа расчёта сечения для партонного подпроцесса $2 \rightarrow 1$	37

Введение

В настоящей работе решается задача вычисления сечения рождения неполяризованного состояния чармония J/ψ , а также сечения рождения поляризованных J/ψ в столкновениях протонов в лидирующем приближении (ЛП) теории возмущений в рамках подходов нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД) и обобщённой партонной модели (ОПМ). Рождение неполяризованного чармония с достаточной точностью описывается в различных моделях адронизации: в НРКХД (в модели цветных сингетов как её частном случае) и не рассматриваемых в данной работе модели испарения цвета и улучшенной модели испарения цвета — в областях применимости теорем о коллинеарной и неколлинеарной факторизации. Вместе с тем до сих пор не удаётся получить достоверных и последовательных предсказаний для поляризации конечных состояний, в частности, в адронных столкновениях, в чём заключается так называемая проблема поляризации (polarization puzzle). И в этой работе мы проверим возможность применения ОПМ для описания рождения поляризованных J/ψ в протон–протонных столкновениях.

Из-за того, что и ОПМ, и НРКХД являются моделями частично феноменологическими, то есть ряд параметров, связанных с распределением начальных партонов и адронизацией конечных кварков в связанное состояние, необходимо извлекать из экспериментальных данных, часть предварительной работы была посвящена описанию имеющихся данных по рождению J/ψ на ускорителях RHIC (коллаборация PHENIX, $\sqrt{s} = 200$ ГэВ) и SPS (коллаборация NA3, $\sqrt{s} = 19.4$ ГэВ). Далее, убедившись в том, что ОПМ и НРКХД адекватно описывают рождение чармония, мы сделали оценку рождения неполяризованных и поляризованных чармониев в планируемых экспериментах коллаборации SPD NICA (Spin Physics Detector Nuclotron-based Ion Collider fAcility) в ОИЯИ.

Целью работы является расчёт параметра поляризации J/ψ , рождающихся в столкновениях протонов, и для её достижения мы сформулировали для себя следующие задачи:

1. найти в рамках НРКХД в лидирующем древесном приближении матричные элементы процессов рождения неполяризованных и поляризованных состояний чармония в процессах кварковой аннигиляции и слияния начальных глюонов,
2. в ЛП теории возмущений по константе связи вычислить сечения рождения J/ψ и других состояний чармония, после чего извлечь феноменологические параметры ОПМ и НРКХД из экспериментальных данных,
3. оценить вклады синглетного и октетного механизмов рождения чармония при описании данных коллабораций PHENIX и NA3,
4. сравнить наши предсказания для поляризации J/ψ с данными эксперимента на коллайдере RHIC,
5. вычислить сечения рождения неполяризованного и поляризованного J/ψ в кинематике коллайдера NICA.

Первая глава работы посвящена краткому обзору квантовой хромодинамики и нерелятивистской КХД как эффективной теории поля для описания рождения тяжёлых кварко-ниев. Во второй главе рассматривается факторизация сечения в конвенциональном подходе коллинеарной партонной модели и в обобщённой партонной модели, которая является попыткой включить в описание начальных партонов распределение по их поперечному импульсу. В заключительную часть помещены все результаты наших аналитических и численных расчётов, как то: вычисление матричных элементов, детали численного интегрирования сечений, извлечение значений феноменологических параметров, оценка теоретических погрешностей наших расчётов.

Глава 1. Теория сильного взаимодействия

1.1 Квантовая хромодинамика

Теоретическим аппаратом описания сильных взаимодействий является квантовая хромодинамика (КХД), раздел квантовой теории поля, описывающий неабелевы калибровочные поля. Переносчиком сильных взаимодействий выступают глюоны, безмассовые калибровочные бозоны, в отличие от фотонов они обладают цветом и могут взаимодействовать друг другом, что делает КХД более сложной теорией по сравнению с квантовой электродинамикой. Фундаментальные фермионы теории называются кварками, они также обладают цветом.

Теория сильных взаимодействий разрабатывалась при этом изначально скорее как удобный математический инструмент. Экспериментальные свидетельства существования предсказанных теорией кварков были обнаружены только годы спустя в опытах по глубоконеупругому рассеянию электронов на нуклонах. Задачей теории, описанной в трудах Гелл-Манна [1], Неэмана [2] и Цвейга [3], была попытка классифицировать и найти порядок в большом разнообразии частиц, наблюдавшихся в космических лучах и в экспериментах на ускорителях (проблема такого неупорядоченного разнообразия получила название зоопарка элементарных частиц). На сегодняшний день известно о кварках 6 ароматов, разделённых на 3 поколения.

Таблица 1 – Кварки и их массы. Масса t -кварка дана по прямым измерениям [4]

	Кварк	Масса	Кварк	Масса
1 поколение	u (верхний)	2.16 МэВ	d (нижний)	4.70 МэВ
2 поколение	s (странный)	93.5 МэВ	c (очарованный)	1.273 ГэВ
3 поколение	b (прелестный)	4.183 ГэВ	t (истинный)	172.57 ГэВ

Теория предсказывала барионы (адроны, состоящие из трёх кварков) с кварковым составом, противоречащим принципу запрета Паули, который не допускает, чтобы одна система содержала по крайней мере два фермиона с одними и теми же квантовыми числами, и который постулирует антисимметричность волновой функции системы фермионов относительно перестановки двух частиц. Например, дельта-резонансы Δ^{++} (uuu), Δ^{-} (ddd) или омега-гиперон Ω^{-} (sss) с сонаправленными спинами кварков. Для разрешения этого противоречия был введён цвет как дополнительная внутренняя степень свободы кварков, причём трёх цветов было достаточно для описания известных частиц.

Однако из-за того, что цвет экспериментально не наблюдался, было постулировано существование только бесцветных, то есть синглетных по цвету, адронов. Синглетные комбинации кварков q и антикварков \bar{q} , инвариантные относительно преобразований цветовой группы $SU_c(3)$ — это, например, $q\bar{q}$, qqq , $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ и другие. И если кварки преобразуются

по триплетному фундаментальному представлению 3 цветовой группы, то антикварки преобразуются по представлению $\bar{3}$. Как уже было упомянуто ранее, системы состава qqq называют барионами, системы $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ — антибарионами, а $q\bar{q}$ — мезонами; если составляющие мезон кварки одного аромата, то такие частицы называют кваркониями: в частности, чармониями в случае c -кварков и боттомониями в случае b -кварков. Мезоны и барионы, предсказанные КХД, соответствуют следующим прямым произведениям представлений $SU(3)$ группы ароматов (то есть учитывается только триплет лёгких кварков u , d и s) [5]:

$$q\bar{q} \longleftrightarrow 3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8,$$

$$qqq(\bar{q}\bar{q}\bar{q}) \longleftrightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

Частицы, как видно, объединяются в синглеты, октеты и декуплеты, которые при анализе свойств наблюдаемых частиц смог выделить Гелл-Манн.

Немного о строении группы $SU_c(3)$, описывающей цветовую структуру адронов. Алгебра группы содержит восемь генераторов — эрмитовых 3×3 матриц T^a с нулевым следом. Они связаны с матрицами Гелл-Манна λ^a в их канонической записи следующим простым выражением: $T^a = \lambda^a/2$. Структурные константы группы симметрии f^{abc} и d^{abc} порождаются коммутационными и антикоммутационными соотношениями для матриц T^a :

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad \{T^a, T^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab} + d^{abc} T^c, \quad f^{abc}, d^{abc} \in \mathbb{R},$$

где δ^{ab} — это дельта Кронекера. Из определения следует, что f^{abc} антисимметричны относительно перестановки двух индексов, а d^{abc} полностью симметричны. Восьми генераторам алгебры соответствуют восемь типов глюонов.

Оператор Казимира алгебры Ли группы цвета $SU_c(3)$ стандартно задаётся следующим выражением

$$\hat{C} = \sum_{a=1}^8 T^a T^a.$$

Для трёхмерного фундаментального представления группы $SU_c(3)$, описывающего кварки, собственное значение оператора Казимира $C_F = 4/3$, а в более общем случае N цветов:

$$C_F(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}.$$

Глюоны описывает восьмимерное присоединённое представление группы $SU_c(3)$, соответствующий ему оператор Казимира $C_A = 3$.

Лагранжиан КХД описывает глюоны и массивные кварки [6]:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}) + \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\psi}_f (i\hat{D} - m_f) \psi_f,$$

здесь $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ — компоненты тензора напряжённости глюонного

поля, A_μ^a — поля глюонов, $\hat{D} = \gamma_\mu D^\mu$, $D^\mu = \partial^\mu - ig_s A_\mu^a T_a$ — ковариантная производная, $\bar{\psi}_f$ — спиноры антикварков, ψ_f — спиноры кварков, $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ — сильная константа связи, n_f — число ароматов кварков в однопетлевой перенормировке. Выражение для константы связи можно можно получить, решая уравнение ренормгруппы для β -функции [6]:

$$\frac{d}{d(\ln(Q/\Lambda))} \bar{g} = \beta(\bar{g}) = - \left(\frac{b_0}{(4\pi)^2} + \frac{b_1 \bar{g}^2}{(4\pi)^3} + \dots \right).$$

В однопетлевом приближении β -функция есть

$$\beta(g) = - \frac{b_0}{(4\pi)^2} = - \frac{33 - 2n_f}{3(4\pi)^2}.$$

тогда выражение для бегущей константы связи:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)},$$

где Q^2 — это энергетический масштаб взаимодействия, квадрат переданного импульса, $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200$ МэВ — характерный энергетический масштаб сильного взаимодействия. Из характера зависимости $\alpha_s(Q^2)$ видно, что при увеличении энергетического масштаба взаимодействия константа связи α_s уменьшается и в пределе стремится к нулю. Это явление было открыто и описано Вильчеком, Гроссом и Политцером [7], оно было названо асимптотической свободой. На больших масштабах энергии взаимодействия частицы можно считать почти свободными, это применимо, например, к кваркам в связанном состоянии в адронах. При этом в истинно свободном состоянии кварки не наблюдаются, это явление называется конфайнментом: с удалением кварков друг от друга энергетический масштаб падает, а константа связи резко возрастает.

Качественно это можно объяснить следующим образом. Создаваемое цветовым зарядом «облако» глюонов и кварков, переносящих цвет, окружает его, так что при отдалении пробный заряд будет «ощущать» всё бóльший объём этого «облака», и эффективно заряд будет увеличиваться. Другими словами наблюдается антиэкранирование заряда, в аналогичном примере в электродинамике наблюдался бы противоположный эффект экранирования заряда. Это подтверждают и расчёты в КХД на решётке [6]. При удалении друг от друга двух цветовых зарядов между ними возникает глюонная трубка или струна, причём эта трубка цветового тока имеет постоянную плотность энергии, поэтому с удлинением трубки увеличивается и энергия взаимодействия зарядов (возрастает константа связи), и при достижении предельной длины трубка разрывается, а её «осколки» адронизируются.

Достаточно быстрое изменение константы сильной связи с энергетическим масштабом накладывает довольно сильное ограничение на использование теории возмущений в КХД. В случае непerturbативных расчётов приходится пользоваться, например, решёточной КХД. Однако когда константа сильного взаимодействия α_s достаточно мала, в режиме слабой связи, возможно стандартно разложить T -экспоненту в ряд и далее воспользоваться техникой диаграмм Фейнмана. Для КХД правила Фейнмана построения амплитуд можно

найти, например, в [6]. Описанная в следующей главе партонная модель является только нулевым приближением теории возмущений. В партонной модели справедлив бьёркеновский скейлинг, при этом эксперимент демонстрирует только приближённое его выполнение [5, 6], а нарушение вызвано зависимостью от масштаба Q^2 партонных распределений, о которых также речь пойдёт ниже.

В дальнейшем нас будет интересовать рождение чармониев в протон–протонных столкновениях. Диаграмма этого процесса показана на рис. 1. Рождение чармония при этом рассматривается не через непосредственное столкновение протонов, а через взаимодействие его структурных составляющих — партонов, отождествлённых с кварками и глюонами. Распределение начальных партонов по импульсу в адронах контролируется партонными функциями распределения (ПФР) и соответствующими им теоремами о факторизации, а партонный подпроцесс, не конкретизированный на рисунке и обозначенный «блбом», рождения кварк–антикварковой пары и её превращения в кварконий описывается моделью адронизации: нерелятивистской квантовой хромодинамикой или, например, моделью испарения цвета.

Чармонием, как сказано выше, называют связанное состояние очарованных кварка и антикварка, основное его фоковское состояние, спиновый триплет $^3S_1^{(1)}$, называют J/ψ -мезоном. Впервые оно было зарегистрировано независимо двумя группами исследователей в 1974 году в процессах аннигиляции электрон–позитронных пар в лаборатории SLAC [8] и в экспериментах по взаимодействию ядер бериллия с фотонами в ускорительном центре в Брукхейвене [9].

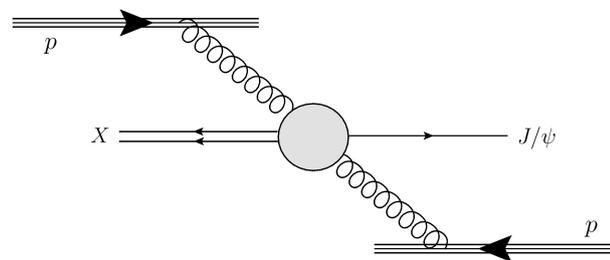


Рисунок 1 – Диаграмма рождения J/ψ в протон–протонных столкновениях. Для примера в качестве начальных партонов изображены глюоны

1.2 НРКХД

Существуют системы, в которых оказывается возможным и удобным ввести определённую систему динамических масштабов, чтобы отделить нерелятивистскую структуру теории от релятивистских эффектов, которые в зависимости от изучаемой системы могут быть достаточно малыми и вовсе не учитываться. Тяжёлый кварконий является хорошим примером такой системы, где из-за большой массы конституентные кварки могут рассматриваться как нерелятивистские, то есть в системе покоя кваркония скорости кварков $v \ll 1$. Эффективная теория поля, в которой рассматриваются связанные состояния сильновзаи-

модействующих частиц в нерелятивистском приближении, называется нерелятивистской квантовой хромодинамикой (НРКХД).

Рассмотрим структуру лагранжиана НРКХД, для этого распишем его в виде трёх слагаемых [10]:

$$\mathcal{L}_{\text{NRQCD}} = \mathcal{L}_{\text{light}} + \mathcal{L}_{\text{heavy}} + \delta\mathcal{L},$$

часть $\mathcal{L}_{\text{light}}$ воспроизводит лагранжиан обычной КХД и описывает глюоны и лёгкие кварки в безмассовом пределе:

$$\mathcal{L}_{\text{light}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f i\hat{D}\psi_f,$$

суммирование проводится по ароматам лёгких кварков. Стандартная дираковская структура описания лёгких кварков в КХД преобразуется введением тяжёлых кварков в нерелятивистском шрёдингеровском описании:

$$\mathcal{L}_{\text{heavy}} = \psi^\dagger \left(iD_t + \frac{\vec{D}^2}{2m} \right) \psi + \chi^\dagger \left(iD_t - \frac{\vec{D}^2}{2m} \right) \chi,$$

где ψ и χ — двухкомпонентные спиноры Паули, соответствующие тяжёлым кваркам и антикваркам, D_t и \vec{D} — временная и пространственная части ковариантной производной $D^\mu = \partial^\mu - ig_s A_a^\mu T_a$, а m — масса тяжёлых кварков. Наконец, слагаемое $\delta\mathcal{L}$ включает в себя первые релятивистские поправки к движению и взаимодействию тяжёлых кварков и антикварков:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \frac{c_1}{8M^3} \left[\psi^\dagger \vec{D}^4 \psi - \chi^\dagger \vec{D}^4 \chi \right] + \\ & + \frac{c_2}{8M^2} \left[\psi^\dagger (\vec{D} \cdot g\vec{E} - g\vec{E} \cdot \vec{D}) \psi + \chi^\dagger (\vec{D} \cdot g\vec{E} - g\vec{E} \cdot \vec{D}) \chi \right] + \\ & + \frac{c_3}{8M^2} \left[\psi^\dagger (i\vec{D} \times g\vec{E} - g\vec{E} \times i\vec{D}) \cdot \vec{\sigma} \psi + \chi^\dagger (i\vec{D} \times g\vec{E} - g\vec{E} \times i\vec{D}) \cdot \vec{\sigma} \chi \right] + \\ & + \frac{c_4}{2M} \left[\psi^\dagger (g\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) \psi - \chi^\dagger (g\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) \chi \right], \end{aligned}$$

коэффициенты выбраны таким образом, что $c \approx 1 + \mathcal{O}(\alpha_s)$, также здесь $\vec{E} \equiv E^i = G_a^{0i}$, $\vec{B} \equiv B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}G_a^{jk}$ — электрические и магнитные компоненты тензора напряжённости глюонного поля. В первом слагаемом $\delta\mathcal{L}$ лежит первая релятивистская поправка к кинетической энергии кварков, что явно видно из разложения энергии кварка в ряд по степеням отношения \vec{p}^2/m^2 :

$$\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \approx m + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3} + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{p}^6}{m^5}\right),$$

остальные слагаемые лагранжиана содержат поправки, описывающие хромоэлектрические и хромомагнитные взаимодействия, вплоть до порядка v^2 .

В рамках НРКХД также оказывается возможным оценить не только порядок по относительной скорости кварков v величины вкладов различных взаимодействий в лагранжиане, но и тем же способом определить величину вклада рождения кваркония через то или

иное фоковское состояние, то есть волновая функция тяжёлого кваркония в НРКХД раскладывается в ряд по скорости v [10]. Соотношение между кинетической и потенциальной энергией в форме, к примеру, теоремы вириала, показывает, что для достаточно больших масс кваркония M , когда в потенциальной энергии доминирует слагаемое, пропорциональное α_s/r (для этого удобно рассматривать Корнельский потенциал [11])

$$U(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \frac{r}{a^2} + c_0$$

взаимодействия между кварками), относительная скорость v пропорциональна сильной константе связи α_s , которая в свою очередь с ростом M логарифмически уменьшается, так как $\alpha_s \sim 1/\ln M$. Так что для чармония, для которого $v^2 \approx 0.2$, возможно введение системы масштабов, характеризующих состояния кваркония с определённым набором квантовых чисел через значения специфических динамических величин [10]. Подробные анализ и оценка величин, характерных для различных фоковских состояний чармония, можно найти в работе [12]. Так, значения массы кваркония M (характеризующее энергию основного состояния), трёхмерного импульса Mv (обратно пропорционального размеру основного состояния) и кинетической энергии с точностью до числового множителя Mv^2 (которая определяет величину расщепления между уровнями радиального и углового возбуждений) удовлетворяют неравенству $M^2 \gg (Mv)^2 \gg (Mv^2)^2$ и действительно позволяют реализовать разложение волновой функции основного состояния чармония в ряд по v [10]; если ограничиться лишь лидирующим слагаемым, то в итоговое сечение внесёт вклад рождение только наблюдаемых синглетных состояний чармония, данный нерелятивистский предел носит название модели цветных синглетов (МЦС) [13–15]:

$$|J/\psi\rangle = \mathcal{O}(v^0)|c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]\rangle + \mathcal{O}(v^1)|c\bar{c}[{}^3P_J^{(8)}]g\rangle + \mathcal{O}(v^2)|c\bar{c}[{}^3S_1^{(1,8)}]gg\rangle + \\ + \mathcal{O}(v^2)|c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}]g\rangle + \mathcal{O}(v^2)|c\bar{c}[{}^1D_J^{(1,8)}]gg\rangle + \dots$$

Подход НРКХД также позволяет осуществить факторизацию жёсткого сечения, которое распадается на произведение сечения рождения кварк–антикварковой пары в состоянии, определяемом соответствующим набором квантовых чисел, и непертурбативного матричного элемента (НМЭ), отвечающего за адронизацию кварк–антикварковой пары в кварконий (здесь c обозначает очарованный кварк, а суммирование проводится по фоковским состояниям, обозначенным для краткости n):

$$d\hat{\sigma}(ab \rightarrow \mathcal{C}X) = \sum_n d\hat{\sigma}(ab \rightarrow c\bar{c}[n]X) \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[n] \rangle / (N_{\text{col}} N_{\text{pol}}),$$

где $N_{\text{col}} = 2N_c$ для синглетных состояний, $N_{\text{col}} = N_c^2 - 1$ для октетных и $N_{\text{pol}} = 2J + 1$, $N_c = 3$ — число цветов, J — полный момент кварк–антикварковой пары. НМЭ синглетных состояний могут быть извлечены из данных по рождению чармониев или могут быть получены в потенциальных моделях тяжёлых кваркониев [16], они связаны со значениями

волновой функции чармония или её производной в нуле:

$$\langle \mathcal{O}^c[{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J+1)|\Psi(0)|^2,$$

$$\langle \mathcal{O}^c[{}^3P_J^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J+1)|\Psi'(0)|^2.$$

Подобный подход не применим к октетным НМЭ, значения которых приходится извлекать из экспериментальных данных. Кроме того, есть возможность их вычисления в рамках решёточной КХД.

Вычисление амплитуд партонных подпроцессов в НРКХД осуществляется с помощью последовательности проецирований. Проекторы на состояния со значениями спинного квантового числа, равного 0 и 1, имеют вид [17]

$$\Pi_0 = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} \left(\frac{\hat{P}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \gamma^5 \left(\frac{\hat{P}}{2} + \hat{q} + m_c \right),$$

$$\Pi_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} \left(\frac{\hat{P}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \gamma^\mu \left(\frac{\hat{P}}{2} + \hat{q} + m_c \right),$$

где m_c — это масса c -кварка, P — полный импульс кварка и антикварка, а q — их относительный импульс. Проекторы на цветовые состояния — синглетное и октетное соответственно:

$$C_1 = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{N_c}}, \quad C_8 = \sqrt{2}T_{ij}^a,$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера, T_{ij}^a — генераторы фундаментального представления цветовой группы $SU(N_c)$, а число цветов $N_c = 3$. Окончательное проецирование на состояние с определённым значением углового момента производится с помощью взятия следа и производной по относительному импульсу q порядка, равного орбитальному квантовому числу (с последующим занулением q). В итоге, амплитуды рождения $c\bar{c}$ -пар могут быть записаны в виде

$$\mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]) = \text{Tr}[C_1 \Pi_1^\mu \mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}) \varepsilon_\mu(J_z, P)]|_{q=0},$$

$$\mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_J^{(1)}]) = \frac{d}{dq_\nu} \text{Tr}[C_1 \Pi_1^\mu \mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}) \varepsilon_{\mu\nu}^{(J)}(J_z, P)]|_{q=0},$$

$$\mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}]) = \text{Tr}[C_8 \Pi_0 \mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c})]|_{q=0},$$

$$\mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_J^{(8)}]) = \frac{d}{dq_\nu} \text{Tr}[C_8 \Pi_1^\mu \mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}) \varepsilon_{\mu\nu}^{(J)}(J_z, P)]|_{q=0},$$

$$\mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]) = \text{Tr}[C_8 \Pi_1^\mu \mathcal{M}(a+b \rightarrow c\bar{c}) \varepsilon_\mu(J_z, P)]|_{q=0}.$$

Обозначение \mathcal{M} внутри знаков следа соответствует амплитуде рождения кварк–антикварковой пары с «отрезанными» линиями конечных кварков, $\varepsilon(J_z, P)$ — это вектор или тензор поляризации.

Суммирование по поляризациям в процессе получения квадрата модуля амплитуды

неполяризованного 3S_1 состояния чармония осуществляется с помощью поляризационного тензора

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \sum_{J_z} \varepsilon_\mu(J_z, P) \varepsilon_\nu^*(J_z, P) = -g_{\mu\nu} + \frac{P_\mu P_\nu}{M^2}.$$

Для неполяризованных 3P_J состояний тензоры имеют следующий вид ($J = 0, 1, 2$)

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu}^{(0)}(P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(0)*}(P) = \frac{1}{3} \mathcal{P}_{\mu\nu} \mathcal{P}_{\rho\sigma},$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{J_z} \varepsilon_{\mu\nu}^{(1)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(1)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho} \mathcal{P}_{\nu\sigma} - \mathcal{P}_{\mu\sigma} \mathcal{P}_{\nu\rho}],$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{J_z} \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho} \mathcal{P}_{\nu\sigma} + \mathcal{P}_{\mu\sigma} \mathcal{P}_{\nu\rho}] - \frac{1}{3} \mathcal{P}_{\mu\nu} \mathcal{P}_{\rho\sigma}.$$

Кроме того, будем рассматривать и поляризованные состояния чармония. Для определения направления спина нами выбрана система отсчёта, связанная со спиральностью кваркония (helicity frame); в этой системе вектор продольной поляризации направлен вдоль трёхмерного импульса кваркония. Ниже приведены выражения тензоров для суммирования по состояниям с выделенной поляризацией. Процедура построения вектора продольной поляризации описана в работе, а его явное выражение и соответствующий тензор для 3S_1 состояния [18]:

$$\varepsilon_\mu(0, P) = \frac{(PQ)P_\mu/M - MQ_\mu}{\sqrt{(PQ)^2 - sM^2}}, \quad \mathcal{P}_{\mu\nu}^0 = \varepsilon_\mu(0, P) \varepsilon_\nu^*(0, P),$$

где Q — сумма импульсов сталкивающихся адронов (в нашем случае протонов) и $s = Q^2$. Поляризованное 3P_1 состояние вычислялось с помощью процедуры, описанной в работе [19]. Тензоры поляризации для P -волновых состояний строятся следующим образом [13]:

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{(J)}(J_z, P) = \sum_{J_{1z}, J_{2z}=-1}^1 \langle 1, J_{1z}; 1, J_{2z} | J, J_z \rangle \varepsilon_\mu(J_{1z}, P) \varepsilon_\nu(J_{2z}, P),$$

где $\langle 1, J_{1z}; 1, J_{2z} | J, J_z \rangle$ — коэффициенты Клебша – Гордана. Тензоры для поляризованных 3P_2 состояний, проекция J_z указана у тензоров верхним индексом [20]:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^0 = \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(0, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(0, P) = \frac{1}{6} [2\mathcal{P}_{\mu\nu}^0 - \mathcal{P}_{\mu\nu}^1] [2\mathcal{P}_{\rho\sigma}^0 - \mathcal{P}_{\rho\sigma}^1], \quad \mathcal{P}_{\mu\nu}^1 = \mathcal{P}_{\mu\nu} - \mathcal{P}_{\mu\nu}^0,$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^1 = \sum_{|J_z|=1} \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho}^0 \mathcal{P}_{\nu\sigma}^1 + \mathcal{P}_{\mu\sigma}^0 \mathcal{P}_{\nu\rho}^1 + \mathcal{P}_{\nu\sigma}^0 \mathcal{P}_{\mu\rho}^1 + \mathcal{P}_{\nu\rho}^0 \mathcal{P}_{\mu\sigma}^1],$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^2 = \sum_{|J_z|=2} \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho}^1 \mathcal{P}_{\nu\sigma}^1 + \mathcal{P}_{\mu\sigma}^1 \mathcal{P}_{\nu\rho}^1 - \mathcal{P}_{\mu\nu}^1 \mathcal{P}_{\rho\sigma}^1].$$

Также обратим внимание на учёт распадов вышележащих энергетических состояний в рождении чармония. Для получения сечения неполяризованного J/ψ проводится сум-

мирование по сечениям рождения возбуждённых состояний, помноженным на бранчинг распада данного состояния в основное, причём вычисление проводится с учётом эффекта отдачи, а именно — выражения для сдвига по поперечному импульсу основного состояния: $p_{TC} \approx (M_c/M_{c'}) \cdot p_{TC'}$ [21]. Учёт распадов в рождении продольно поляризованного состояния J/ψ устроен сложнее, далее приведено полное выражение для этого сечения [19]:

$$\sigma_L^{J/\psi} = \sigma_L^{J/\psi, \text{прямое}} + \sigma_L^{\chi_{cJ}} + \sigma_L^{\psi'} + \sigma_L^{\psi' \rightarrow \chi_{cJ}},$$

каждое из слагаемых само представлено суммой сечений, в котором числовые коэффициенты на самом деле представляют собой квадраты модулей коэффициентов Клебша — Гордана, связывающих состояния с различными значениями спина:

$$\begin{aligned} \sigma_L^{J/\psi(\psi'), \text{прямое}} &= \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^3S_1^{(1)}) + \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^3S_1^{(8)}) + \frac{1}{3} \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^1S_0^{(8)}) + \\ &+ \frac{1}{3} \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_0^{(8)}) + \frac{1}{2} \sigma_1^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_1^{(8)}) + \frac{2}{3} \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_2^{(8)}) + \frac{1}{2} \sigma_1^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_2^{(8)}), \\ \sigma_L^{\chi_{cJ}} &= \left[\frac{1}{3} \sigma^{\chi_{c0}} ({}^3P_0^{(1)}) + \frac{1}{3} \sigma^{\chi_{c0}} ({}^3S_1^{(8)}) \right] \text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \sigma_1^{\chi_{c1}} ({}^3P_1^{(1)}) + \frac{1}{2} \sigma_0^{\chi_{c1}} ({}^3S_1^{(8)}) + \frac{1}{4} \sigma_1^{\chi_{c1}} ({}^3S_1^{(8)}) \right] \text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[\frac{2}{3} \sigma_0^{\chi_{c2}} ({}^3P_2^{(1)}) + \frac{1}{2} \sigma_1^{\chi_{c2}} ({}^3P_2^{(1)}) + \frac{17}{30} \sigma_0^{\chi_{c2}} ({}^3S_1^{(8)}) + \frac{13}{60} \sigma_1^{\chi_{c2}} ({}^3S_1^{(8)}) \right] \text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma), \\ \sigma_L^{\psi'} &= \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} \text{Br}(\psi' \rightarrow J/\psi + X), \\ \sigma_L^{\psi' \rightarrow \chi_{cJ}} &= \frac{1}{3} \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} \text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c0} + \gamma) \text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} + \frac{1}{4} \sigma_T^{\psi', \text{прямое}} \right] \text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c1} + \gamma) \text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[\frac{17}{30} \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} + \frac{13}{60} \sigma_T^{\psi', \text{прямое}} \right] \text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c2} + \gamma) \text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma). \end{aligned}$$

Нижние индексы L и T соответствуют продольной и поперечной поляризации состояний.

Глава 2. Модели факторизации

2.1 Коллинеарная партонная модель

В 1967–1979 годы в лаборатории SLAC были проведены эксперименты по глубоконеупругому рассеянию электронов на ядрах водорода и дейтерия [22, 23]. Результатом проведённых измерений стало открытие, состоящее в том, что основной вклад в сечение давали жёсткие процессы, сопровождающиеся разрушением нуклонов и образованием адронных пучков, летящих преимущественно вдоль оси соударения начальных частиц. При этом полное сечение процесса совпадало со значением, предсказанным квантовой электродинамикой (КЭД), в котором учитывались только упругие взаимодействия. Да и при достаточно большой энергии столкновений импульсы адронов становятся почти что светоподобными, это не может быть согласовано с тем, что адроны, поглощая большие импульсы, не рассеиваются на большие углы. Это противоречие разрешилось предложением в 1969 году Бьёркеном и Фейнманом партонной модели, согласно которой нуклон состоит из почти свободных точечных объектов, названных партонами. Позднее, после экспериментальных подтверждений, партоны отождествили с кварками и глюонами. В высокоэнергетических столкновениях нуклоны разрушаются, а осколки от них адронизируются, образуя множество летящих сонаправленно частиц — адронные струи. Экспериментально были зарегистрированы двух-, трёх- и четырёхструйные события [24–26].

Сегодня название партонной модели дополняют термином коллинеарная (КПМ), подчёркивая этим приближение, в котором рассматриваются начальные партоны. В системе центра масс (СЦМ), где ось O_z направлена вдоль протонных пучков, импульсы партонов запишем как доли импульсов протонов:

$$q_1^\mu = x_1 p_1^\mu, \quad q_2^\mu = x_2 p_2^\mu,$$

где p_1^μ, p_2^μ — импульсы протонов, q_1^μ, q_2^μ — импульсы конститuentных партонов, а x_1 и x_2 — доли продольных импульсов протонов, которыми обладают партоны. При энергиях много больших масс протонов $\sqrt{s} \gg m_p$ их импульсы будем рассматривать в безмассовом пределе:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1).$$

Тогда импульсы партонов:

$$q_1 = \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1), \quad q_2 = \frac{x_2 \sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1).$$

Распределение партонов по доле импульса x описывается партонными функциями распределения (ПФР), вид которых последовательно теоретически не выводится, а извлекается из эксперимента. Партонные распределения подчиняются следующему выражению,

прямо следующему из их определения правилу сумм:

$$\sum_i \int_0^1 dx x f_i(x) = 1,$$

где $f_i(x)$ обозначена функция распределения i -го партона, и суммирование здесь осуществляется по всем партонам материнского протона.

Рассмотрим кинематику столкновения и найдём выражения для доли импульса x . Если начальный импульс партона q , а переданный ему импульс Q , то квадрат импульса после взаимодействия можем записать:

$$(q + Q)^2 = Q^2 + 2(qQ) + q^2 \approx Q^2 + 2(qQ) = Q^2 + 2x(pQ) \approx 0.$$

Квадрат переданного партону импульса $Q = (0, \vec{Q})$, то есть он пространственноподобен или $Q^2 < 0$, поэтому учтём $Q^2 = -Q^2$ и тогда

$$2x(pQ) - Q^2 \approx 0, \quad x \approx \frac{Q^2}{2(pQ)}.$$

В простейшем приближении ПФР явно не зависят от переданного импульса Q , он входит множителями только в доли продольных импульсов x . Такое явление независимости ПФР от кинематики столкновений называется бьёркеновским скейлингом, однако он наблюдается в довольно узкой области, и чем меньше x , тем больше отклонение от теории [27]. На самом деле функции распределения зависят от энергетического масштаба взаимодействия, и эта зависимость описывается уравнениями ДГЛАП (Докшицера – Грибова – Липатова – Альтарелли – Паризи). А приближённо наблюдаемый при больших x скейлинг обусловлен тем, что зависимость от Q^2 входит в уравнения через логарифм. Уравнения ДГЛАП описывают эволюцию глюонных функций распределения и кварковых и антикварковых распределений для различных ароматов [6]:

$$\frac{df_q(x, Q)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(P_{q \leftarrow q}(y) f_q \left(\frac{x}{y}, Q \right) + P_{q \leftarrow g}(y) f_g \left(\frac{x}{y}, Q \right) \right),$$

$$\frac{df_{\bar{q}}(x, Q)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(P_{q \leftarrow q}(y) f_{\bar{q}} \left(\frac{x}{y}, Q \right) + P_{q \leftarrow g}(y) f_g \left(\frac{x}{y}, Q \right) \right),$$

$$\frac{df_g(x, Q)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(P_{g \leftarrow q}(y) \sum_f \left[f_q \left(\frac{x}{y}, Q \right) + f_{\bar{q}} \left(\frac{x}{y}, Q \right) \right] + P_{g \leftarrow g}(y) f_g \left(\frac{x}{y}, Q \right) \right),$$

где $\alpha_s(Q^2)$ – бегущая константа связи, сумма по f подразумевает суммирование по ароматам. В лидирующем приближении по константе сильного взаимодействия функции расщепления P в уравнениях ДГЛАП учитывают вклады от возможных промежуточных актов

взаимодействия, таких как расщепление глюона в кварк-антикварковую пару, излучение кварком глюона, испускание глюоном глюона:

$$\begin{aligned}
P_{g \leftarrow q}(y) &= \frac{4}{3} \left[\frac{1 + (1-y)^2}{y} \right], \\
P_{q \leftarrow q}(y) &= \frac{4}{3} \left[\frac{1 + y^2}{(1-y)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-y) \right], \\
P_{q \leftarrow g}(y) &= \frac{1}{2} [y^2 + (1-y)^2], \\
P_{g \leftarrow g}(y) &= 6 \left[\frac{(1-y)}{y} + \frac{y}{(1-y)_+} + y(1-y) + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(1-y) \right],
\end{aligned}$$

здесь n_f — число ароматов лёгких кварков, учитываемых в перенормировке, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, функция с индексом «+» — это обобщённая функция, определённая следующим образом:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1-x)_+} dx = \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{(1-x)} dx.$$

Важной практической частью КПМ является теорема о факторизации, позволяющая рассмотреть сечение процессов как ряд вкладов порядка степеней (q_T/μ_F) , где поперечные импульсы начальных партонов пренебрежимо малы по сравнению с жёстким масштабом взаимодействия, или масштабом факторизации, $q_T \ll \mu_F \sim k_T$, k_T здесь это поперечный импульс конечного состояния, и используя это, разложить сечение процесса на произведение множителей, соответствующих разным энергетическим и пространственно-временным масштабам [28]:

$$d\sigma(pp \rightarrow CX) = \int dx_1 f_1(x_1, \mu_F^2) \int dx_2 f_2(x_2, \mu_F^2) d\hat{\sigma}.$$

Сечение в КПМ представляется в виде произведения партонных распределений f_1 и f_2 для первого и второго протона соответственно и сечения жёсткого партонного подпроцесса $d\hat{\sigma}$ на масштабе μ_F^2 , буквой C здесь и далее обозначен чармоний, рождённый в некотором состоянии. Сечение жёсткого подпроцесса:

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{I} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}},$$

где $I \approx 2x_1 x_2 s$ — это потоковый фактор, $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ — квадрат модуля амплитуды партонного подпроцесса, просуммированный по начальным и усреднённый по конечным состояниям, k_1 и k_2 — импульсы двух конечных частиц. Кинематика КПМ не позволяет рассматривать подпроцессы $2 \rightarrow 1$, они невозможны вследствие выполнения закона сохранения энергии-импульса.

Теперь, если компоненты импульса чармония \mathcal{C}

$$k_1 = (k_{10}, k_{1x}, k_{1y}, k_{1z}) \equiv (k_{10}, \vec{k}_{1T}, k_{1z}),$$

то быстрота чармония определяется как

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_{10} + k_{1z}}{k_{10} - k_{1z}} \right).$$

Поперечная масса частицы есть

$$m_T = \sqrt{m^2 + k_T^2}$$

и мандельстамовские инварианты

$$\hat{s} = (q_1 + q_2)^2 = (k_1 + k_2)^2, \quad \hat{t} = (q_1 - k_1)^2 = (q_2 - k_2)^2, \quad \hat{u} = (q_1 - k_2)^2 = (q_2 - k_1)^2,$$

удовлетворяющие условию (в безмассовом пределе начальных партонов, m_1 и m_2 — массы конечных частиц)

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = m_1^2 + m_2^2.$$

Выразим мандельстамовские переменные через кинематические величины:

$$\hat{s} = x_1 x_2 s, \quad \hat{t} = m_1^2 - m_{1T} x_1 \sqrt{s} e^{-y_1}, \quad \hat{u} = m_2^2 - m_{2T} x_1 \sqrt{s} e^{-y_2}.$$

Сняв все возможные интегралы аналитически, выражение для сечения рождения чармония в КПМ приведём к форме

$$\sigma = \int dk_{1T} \int dx_1 \int dy_1 \frac{k_{1T}}{8\pi \hat{s} (x_1 s - \sqrt{s} m_{1T} e^{y_1})} \left(f_1(x_1, \mu_F^2) f_2(x_2, \mu_F^2) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \right),$$

причём закон сохранения энергии–импульса позволяет выразить x_2 через x_1 :

$$x_2 = \frac{x_1 \sqrt{s} m_{1T} e^{-y_1} - m_1^2 + m_2^2}{x_1 s - \sqrt{s} m_{1T} e^{y_1}},$$

также он накладывает условие на нижний предел интегрирования по x_1 :

$$x_1^{\min} = \frac{\sqrt{s} m_{1T} e^{y_1} - m_1^2 + m_2^2}{s - \sqrt{s} m_{1T} e^{-y_1}}.$$

2.2 Обобщённая партонная модель

Имея только $k_T > \mu_F$ в качестве области применимости КПМ, возникает необходимость факторизации, которая бы описывала область малых поперечных импульсов — в этой области коллинеарная модель предсказывает расходимость сечения при приближении к нулю (коллинеарная расходимость). Кроме того, уравнения ДГЛАП не описывают

резкий рост ПФР при малых продольных долях x , тогда и поперечным импульсом партонов уже нельзя пренебречь.

Один из способов включить в описание область малых импульсов — это подход TMD-факторизации (transverse-momentum-dependence) [28], в котором предполагается, что начальные партоны обладают ненулевыми поперечными компонентами импульсов. Область применения строгой TMD-факторизации ограничивается узким интервалом значений поперечных импульсов конечной частицы $k_T \ll \mu_F$. Обобщённую партонную модель (ОПМ) можно назвать феноменологической реализацией идеи TMD-факторизации. Если в КПМ импульсы начальных партонов описываются как продольные компоненты импульсов протонов, то в ОПМ вводятся в рассмотрение ненулевые поперечные импульсы, а зависимость ПФР от поперечного импульса выбирается в наиболее простом и естественном виде. По сравнению с TMD область применимости ОПМ расширяется до интервала $k_T \lesssim M$, где M — это масса конечной частицы, чармония в нашем случае; далее под M и будет подразумеваться масса того или иного состояния чармония.

Обозначим, как и раньше, импульсы партонов в соответствующих протонах как q_1 и q_2 . Будем явно выделять их поперечные компоненты q_{1T}, q_{2T} , тогда импульсы начальных партонов могут быть записаны в виде

$$q_1^\mu = x_1 p_1^\mu + y_1 p_2^\mu + q_{1T}^\mu, \quad q_2^\mu = x_2 p_2^\mu + y_2 p_1^\mu + q_{2T}^\mu, \quad q_{iT}^\mu = (0, \vec{q}_{iT}, 0), \quad i = 1, 2,$$

где x и y — это доли импульсов протонов. Здесь ради сохранения калибровочной инвариантности (то есть выполнения условия $q_1^2 = q_2^2 = 0$) в импульсы партонов искусственно добавлены слагаемые, пропорциональные импульсам летящих им навстречу протонов. Условие калибровочной инвариантности требует, чтобы начальные партоны были на массовой поверхности, что позволяет найти выражения для долей импульса y :

$$y_i = \frac{t_i}{s x_i}, \quad t_i = \vec{q}_{iT}^2, \quad i = 1, 2.$$

Компоненты импульсов q_1, q_2 могут быть представлены следующим образом:

$$q_1 = \left(\frac{x_1 \sqrt{s}}{2} + \frac{t_1}{2\sqrt{s}x_1}, \vec{q}_{1T}, \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} - \frac{t_1}{2\sqrt{s}x_1} \right),$$

$$q_2 = \left(\frac{x_2 \sqrt{s}}{2} + \frac{t_2}{2\sqrt{s}x_2}, \vec{q}_{2T}, -\frac{x_2 \sqrt{s}}{2} + \frac{t_2}{2\sqrt{s}x_2} \right).$$

Хотя строго теорема о факторизации сечения доказана только для КПМ, она используется и в ОПМ, и для процесса рождения чармония в столкновении протонов записывается в виде

$$d\sigma(pp \rightarrow CX) = \int dx_1 \int d^2 q_{1T} F_1(x_1, \mu_F^2, q_{1T}) \int dx_2 \int d^2 q_{2T} F_2(x_2, \mu_F^2, q_{2T}) d\hat{\sigma},$$

где $d\hat{\sigma}$ — сечение жёсткого партонного подпроцесса, которое соответственно для подпро-

цессов $2 \rightarrow 1$ и $2 \rightarrow 2$ записывается следующим образом:

$$d\hat{\sigma}(ab \rightarrow C) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - k_1) \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{I} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}},$$

$$d\hat{\sigma}(ab \rightarrow Cd) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{I} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}},$$

здесь k_i — импульсы конечных частиц, $I \approx 2x_1 x_2 s$ — потоковый фактор, а $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ — усреднённый по конечным спиновым и цветовым состояниям и суммированный по начальным квадрат модуля амплитуды партонного подпроцесса. Партонные функции распределения $F(x, \mu_F^2, q_T)$ в ОПМ-факторизации представляются в форме произведения не зависящих от поперечного импульса коллинеарных партонных распределений и множителей, включающих данную зависимость:

$$F(x, \mu_F^2, q_T) = f(x, \mu_F^2) G(q_T),$$

используемый анзац для функции $G(q_T)$ имеет гауссову форму с соответствующим нормировочным условием [29]:

$$G(q_T) = \frac{e^{-q_T^2 / \langle q_T^2 \rangle}}{\pi \langle q_T^2 \rangle}, \quad \int G(q_T) d^2 q_T = 1.$$

Значение феноменологического параметра $\langle q_T^2 \rangle$, имеющего смысл среднего значения квадрата поперечного импульса начальных партонов, традиционно берётся равным 1 ГэВ^2 [30], однако далее, исходя из зависимости величины $\langle q_T^2 \rangle$ от энергии столкновения, его значение будет извлечено из экспериментальных данных при различных \sqrt{s} .

Сняв явно возможные интегралы, запишем выражения для сечения рождения J/ψ в $2 \rightarrow 1$ ($q_1 + q_2 \rightarrow k_1$) подпроцессе, а также значения долей импульсов $x_{1,2}$:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{s} \int dt_1 \int d\varphi \int dy_1 \int dk_{1T} \frac{k_{1T}}{\sqrt{\mathcal{D}_1}} F_1(x_1, \mu_F^2, t_1) F_2(x_2, \mu_F^2, t_2) |\overline{\mathcal{M}}|^2,$$

$$x_1 = \frac{e^{y_1}}{2m_T \sqrt{s}} \left(m_{1T}^2 + t_1 - t_2 + \sqrt{\mathcal{D}_1} \right), \quad x_2 = \frac{e^{-y_1}}{2m_T \sqrt{s}} \left(m_{1T}^2 - t_1 + t_2 + \sqrt{\mathcal{D}_1} \right),$$

$$\mathcal{D}_1 = (m_{1T}^2 - t_1 - t_2)^2 - 4t_1 t_2, \quad t_2 = k_{1T}^2 + t_1 - 2k_{1T} \sqrt{t_1} \cos \varphi,$$

где φ — это полярный угол между \vec{q}_{1T} и \vec{k}_T , m_{1T} — поперечная масса J/ψ . И аналогичные выражения для $2 \rightarrow 2$ партонных подпроцессов:

$$\sigma = \frac{1}{16\pi s} \int dt_1 \int d\varphi_1 \int dk_{1T} \int dk_{2T} \int d\varphi_{12} \int dy_1 \int dy_2 \frac{k_{1T} k_{2T}}{\sqrt{\mathcal{D}_2}} \times \\ \times F_1(x_1, \mu_F^2, t_1) F_2(x_2, \mu_F^2, t_2) |\overline{\mathcal{M}}|^2,$$

$$x_1 = \frac{m_{1T}^2 + m_{2T}^2 + 2m_{1T}m_{2T} \operatorname{ch}(y_1 - y_2) + t_1 - t_2 + \sqrt{\mathcal{D}_2}}{2\sqrt{s}(m_{1T}e^{-y_1} + m_{2T}e^{-y_2})},$$

$$x_2 = \frac{m_{1T}^2 + m_{2T}^2 + 2m_{1T}m_{2T} \operatorname{ch}(y_1 - y_2) - t_1 + t_2 + \sqrt{\mathcal{D}_2}}{2\sqrt{s}(m_{1T}e^{y_1} + m_{2T}e^{y_2})},$$

$$\mathcal{D}_2 = (m_{1T}^2 + m_{2T}^2 + 2m_{1T}m_{2T} \operatorname{ch}(y_1 - y_2) - t_1 - t_2)^2 - 4t_1t_2,$$

$$t_2 = k_{1T}^2 + k_{2T}^2 + t_1 + 2k_{1T}k_{2T} \cos \varphi_{12} - 2k_{1T}\sqrt{t_1} \cos \varphi_1 - 2k_{2T}\sqrt{t_1} \cos(\varphi_{12} - \varphi_1),$$

где φ_1 — полярный угол между \vec{q}_{1T} и \vec{k}_{1T} , а φ_{12} — полярный угол между \vec{k}_{1T} и \vec{k}_{2T} . Мандельштамовские инварианты для $2 \rightarrow 2$ подпроцессов выражаются в кинематических величинах следующим образом:

$$\hat{s} = m_1^2 + m_2^2 + 2m_{1T}m_{2T} \operatorname{ch}(y_1 - y_2) - 2k_{1T}k_{2T} \cos \varphi_{12},$$

$$\hat{t} = m_1^2 - m_{1T}(x_1\sqrt{s}e^{-y_1} + \frac{t_1}{x_1\sqrt{s}}e^{y_1}) + 2\sqrt{t_1}k_{1T} \cos \varphi_1,$$

$$\hat{u} = m_2^2 - m_{2T}(x_1\sqrt{s}e^{-y_2} + \frac{t_1}{x_1\sqrt{s}}e^{y_2}) + 2\sqrt{t_1}k_{2T} \cos(\varphi_{12} - \varphi_1).$$

Глава 3. Результаты вычислений

Расчёт всех сечений рождения чармония проводился с помощью Fortran-программы с включённой в неё библиотекой численного Монте-Карло интегрирования CUBA [31]. В неё встроены 4 разных алгоритма интегрирования: Suave, Divonne, Vegas и Cuhre — мы использовали Suave. Относительная заданная точность всех расчётов — не более 1%. В качестве примера в приложении приведён листинг программы расчёта сечения рождения J/ψ в партонном подпроцессе $2 \rightarrow 1$. Вычисление матричных элементов проводилось в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica с применением пакетов FeynCalc [32] и FeynArts [33]. В качестве коллинеарных ПФР в лидирующем порядке были взяты численно заданные функции MSTW2008LO [34].

Партонный подпроцесс $2 \rightarrow 1$ рождения тяжёлого кваркония может идти через три фейнмановские диаграммы, если начальные партоны — это глюоны, и через одну диаграмму в случае начальных лёгких кварков u, d, s . В подпроцессах $2 \rightarrow 2$ в общем случае ненулевой вклад дают 16 диаграмм. Все они показаны на рис. 2 и рис. 3.

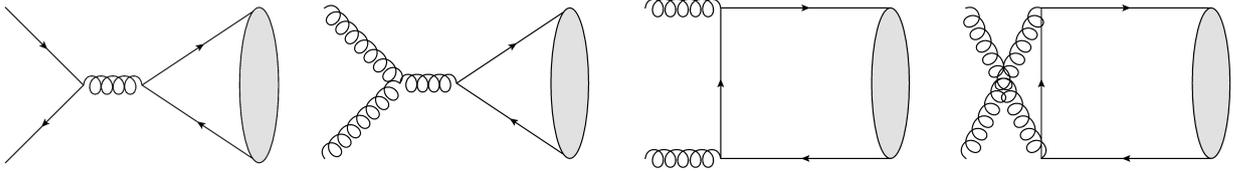


Рисунок 2 – Диаграмма для $q + \bar{q} \rightarrow J/\psi$ слева и три диаграммы для $g + g \rightarrow J/\psi$ справа

3.1 Рождение неполяризованных чармониев

Матричные элементы процессов рождения различных неполяризованных состояний чармония приведены в табл. 2.

Вычисление всех вкладов в рождение J/ψ было проведено в лидирующем порядке теории возмущений по бегущей константе связи α_s . В вычислениях значения масс состояний чармония принимались следующими [4]: $m_{J/\psi} = 3.096$ ГэВ, $m_{\psi'} = 3.686$ ГэВ, $m_{\chi_{c0}} = 3.415$ ГэВ, $m_{\chi_{c1}} = 3.510$ ГэВ, $m_{\chi_{c2}} = 3.556$ ГэВ.

Распады возбуждённых состояний чармония в J/ψ и распады J/ψ в пары электрон-позитрон или мюон-антимюон учитывались бранчингами — дополнительными феноменологическими множителями, на которые домножались соответствующие им сечения [4]: $\text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.014$, $\text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.343$, $\text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.19$, $\text{Br}(\psi' \rightarrow J/\psi + X) = 0.614$, $\text{Br}(J/\psi \rightarrow e^+e^-) = 0.05971$, $\text{Br}(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.05961$, $\text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c0} + \gamma) = 0.0979$, $\text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c1} + \gamma) = 0.0975$, $\text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c2} + \gamma) = 0.0952$. Значения НМЭ, которые в НРКХД соответствуют адронизации рождающейся пары очарованных кварков, были взяты следующими [35]: $\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 1.3$ ГэВ³, $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 0.65$ ГэВ³,

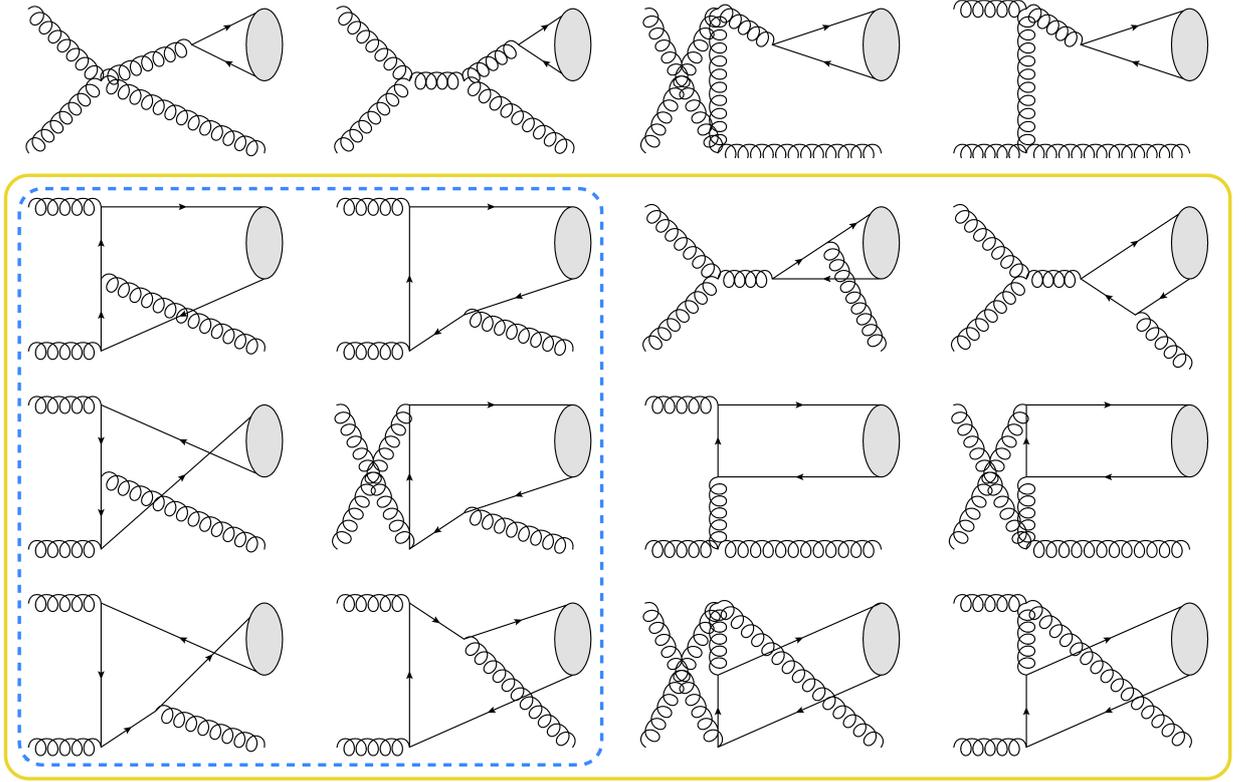


Рисунок 3 – Диаграммы для подпроцесса $g + g \rightarrow J/\psi + g$. Сплошной линией обведены диаграммы, дающие ненулевой вклад в рождение ${}^3P_J^{(1,8)}$, ${}^1S_0^{(8)}$, штриховой линией – в рождение ${}^3S_1^{(1)}$ состояния, все 16 диаграмм дают ненулевой вклад в рождение ${}^3S_1^{(8)}$

$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle = 0.089 \text{ ГэВ}^5$, также использовались соотношения для НМЭ, справедливые в лидирующем порядке НРКХД по v и отражающие спиновую симметрию тяжёлых кварков:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3P_J^{(1)}] \rangle &= (2J + 1) \cdot \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle, \\ \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[{}^3P_J^{(8)}] \rangle &= (2J + 1) \cdot \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle, \\ \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle &= (2J + 1) \cdot \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle. \end{aligned}$$

При расчётах в качестве масштаба перенормировки μ_R в выражении для константы связи α_s и масштаба факторизации μ_F , от которого зависят ПФР, была принята поперечная масса чармония $m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$. Так как выбор величины для масштабов является довольно свободным, то для оценки коридора ошибок теоретических предсказаний масштаб варьировался на множитель 2 в большую и меньшую сторону, коридор погрешностей на графиках будет показан светлой полосой того же цвета, что и основная линия.

Для предсказания рождения и поляризации J/ψ в протон-протонных столкновениях на ускорителе NICA при энергии $\sqrt{s} = 27 \text{ ГэВ}$ сначала были проведены вычисления и сравнения для того же процесса при других энергиях – использовались результаты измерений коллабораций PHENIX ($\sqrt{s} = 200 \text{ ГэВ}$) [36] и NA3 ($\sqrt{s} = 19.4 \text{ ГэВ}$) [37]. Для описания рождения J/ψ в интервале малых быстрот $|y| < 0.35$ и при $p_T \ll 3 \text{ ГэВ}$ бы-

ло достаточно синглетного вклада при традиционном значении $\langle q_T^2 \rangle_g = 1 \text{ ГэВ}^2$. Однако его оказалось достаточно для описания данных измерений вплоть до $p_T \lesssim 3 \text{ ГэВ}$, то есть во всей области применимости ОПМ — был фитирован на этих экспериментальных данных для рождения J/ψ сам параметр $\langle q_T^2 \rangle_g$, значение которого чувствительно к энергии процесса: $\langle q_T^2 \rangle_g = 2.80 \text{ ГэВ}^2$, $\chi^2/\text{d.o.f.} = 0.18$, расчёты отображены на графике (рис. 4) с указанием вкладов различных синглетных состояний в суммарное сечение J/ψ .

Также были фитированы данные измерений коллаборации PHENIX [36] для больших быстрот $1.2 < |y| < 2.2$ и данные коллаборации NA3 [37]. Для описания этих экспериментов синглетного вклада было недостаточно, поэтому учитывался вклад от рождения октетных состояний с начальными глюонами и кварками, так как состояние ${}^3S_1^{(8)}$ в процессах с начальными глюонами не рождается. Следовательно, появился целый ряд новых

Таблица 2 – Матричные элементы рождения неполяризованных состояний чармония

Партонный subprocess	Матричный элемент $ \overline{\mathcal{M}} ^2$
$g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_0^{(1)}]$	$\frac{8\pi^2\alpha_s^2}{3M^3} \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle$
$g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_2^{(1)}]$	$\frac{32\pi^2\alpha_s^2}{45M^3} \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^3P_2^{(1)}] \rangle$
$g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^1S_0^{(8)}]$	$\frac{5\pi^2\alpha_s^2}{12M} \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^1S_0^{(8)}] \rangle$
$g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_0^{(8)}]$	$\frac{5\pi^2\alpha_s^2}{M^3} \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle$
$g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_2^{(8)}]$	$\frac{4\pi^2\alpha_s^2}{3M^3} \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^3P_2^{(8)}] \rangle$
$q + \bar{q} \rightarrow \mathcal{C}[{}^3S_1^{(8)}]$	$\frac{16\pi^2\alpha_s^2}{9M} \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$
$g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3S_1^{(1)}] + g$	$\frac{320\pi^3\alpha_s^3 M \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^3S_1^{(1)}] \rangle}{81(M^2 - \hat{t})^2(M^2 - \hat{u})^2(\hat{t} + \hat{u})^2} \times$ $\times [M^4(\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}^2) - M^2(2\hat{t}^3 + 3\hat{t}^2\hat{u} + 3\hat{t}\hat{u}^2 + 2\hat{u}^3) +$ $+(\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}^2)^2]$
$g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_1^{(1)}] + g$	$\frac{128\pi^3\alpha_s^3 \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[{}^3P_1^{(1)}] \rangle}{9M^3(M^2 - \hat{t})^4(M^2 - \hat{u})^4(\hat{t} + \hat{u})^4} \times$ $\times [\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}^2 - M^2(\hat{t} + \hat{u})]^2 \times$ $\times [M^{10}(\hat{t}^2 + \hat{u}^2) - 2\hat{t}\hat{u}(\hat{t} + \hat{u})(\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}^2)^2 -$ $- 2M^8(\hat{t} + \hat{u})(3\hat{t}^2 - \hat{t}\hat{u} + 3\hat{u}^2) -$ $- 4M^4(\hat{t} + \hat{u})(3\hat{t}^4 + 5\hat{t}^3\hat{u} + \hat{t}^2\hat{u}^2 + 5\hat{t}\hat{u}^3 + 3\hat{u}^4) +$ $+ M^6(13\hat{t}^4 + 20\hat{t}^3\hat{u} + 10\hat{t}^2\hat{u}^2 + 20\hat{t}\hat{u}^3 + 13\hat{u}^4) +$ $+ M^2(4\hat{t}^6 + 18\hat{t}^5\hat{u} + 25\hat{t}^4\hat{u}^2 + 20\hat{t}^3\hat{u}^3 + 25\hat{t}^2\hat{u}^4 + 18\hat{t}\hat{u}^5 + 4\hat{u}^6)]$

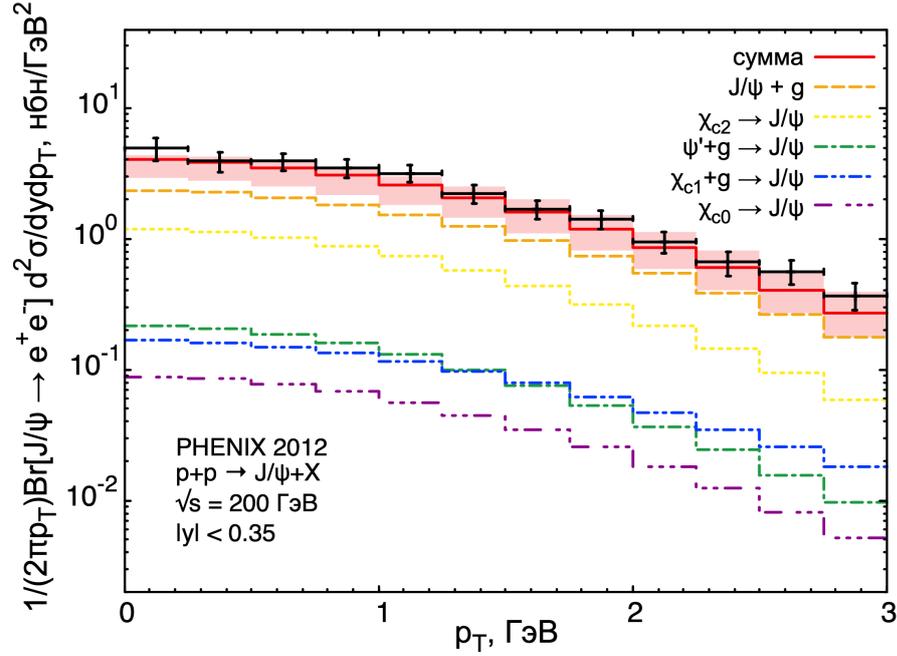


Рисунок 4 – Зависимость дифференциального сечения рождения J/ψ от поперечного импульса чармония p_T . Экспериментальные данные по рождению J/ψ коллаборации PHENIX [36]

параметров для фитирования: $\langle q_T^2 \rangle_q$ (помимо аналогичного глюонного параметра) и октетные НМЭ. Причём вклады от рождения J/ψ в процессах $2 \rightarrow 1$ в состояниях $^1S_0^{(8)}$, $^3P_0^{(8)}$, $^3P_2^{(8)}$ имеют одинаковую зависимость от p_T , то есть пропорциональны друг другу, поэтому соответствующие им НМЭ могут быть извлечены из экспериментальных данных только в виде линейной комбинации $M_7^{J/\psi} = \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [^1S_0^{(8)}] \rangle + 7 \cdot \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [^3P_0^{(8)}] \rangle / m_c^2$. Значения всех параметров, фитированных на данных PHENIX и NA3, помещены в табл. 3, а результаты расчётов — на рис. 5, 6, 7, 8. Как видно, вклад октетных состояний (в процессах с начальными глюонами) становится сравним с синглетным вкладом и даже превышает его, а в случае с данными NA3 — он один почти полностью описывает эксперимент.

Для расчёта предсказаний поляризации ψ' были фитированы и данные PHENIX по рождению ψ' при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ [36]. Параметры, относящиеся к ОПМ, были взяты из фитирования данных по рождению J/ψ (табл. 3), так как они не должны зависеть от процесса, а октетные НМЭ, в частности $M_7^{\psi'} = \langle \mathcal{O}^{\psi'} [^1S_0^{(8)}] \rangle + 7 \cdot \langle \mathcal{O}^{\psi'} [^3P_0^{(8)}] \rangle / m_c^2$ и $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [^3P_1^{(8)}] \rangle$, были фитированы, и результаты этих расчётов помещены в табл. 4 и на рис. 9.

Перейдём к предсказаниям рождения J/ψ при энергии эксперимента SPD NICA. В расчётах учитывались вклады и использовались параметры, фитированные на данных измерений коллаборации NA3 из-за близости энергии \sqrt{s} этих двух экспериментов. На рис. 10, 11, 12 и 13 показаны результаты расчётов для дифференциального сечения рождения J/ψ как функций поперечного импульса p_T и быстроты y соответственно.

На рис. 14 можно увидеть вычисления отношений вкладов P -волновых состояний чармония χ_{cJ} в рождение J/ψ .

Таблица 3 – Результаты фитирования сечения рождения J/ψ в ОПМ на данных коллаборации PHENIX в области больших быстрот $1.2 < |y| < 2.2$ и данных коллаборации NA3 при $y > 0$.

Эксп. данные	PHENIX [36]	NA3 [37]
$\langle q_T^2 \rangle_g, \text{ГэВ}^2$	2.80	0.85
$\langle q_T^2 \rangle_q, \text{ГэВ}^2$	1.30	0.15
$M_7^{J/\psi}, \text{ГэВ}^3$	$(5.17 \pm 0.33) \cdot 10^{-2}$	
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ГэВ}^3$	$(0.00 \pm 0.26) \cdot 10^{-2}$	
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ГэВ}^3$	$(4.12 \pm 3.55) \cdot 10^{-3}$	
$\chi^2/\text{d.o.f}$	0.52	

Таблица 4 – Результаты фитирования сечения рождения ψ в ОПМ на данных коллаборации PHENIX в области быстрот $|y| < 0.35$

Эксп. данные	PHENIX [36]
$M_7^{\psi'}, \text{ГэВ}^3$	$(3.65 \pm 3.82) \cdot 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3P_1^{(8)}] \rangle, \text{ГэВ}^5$	$(0.05 \pm 1.24) \cdot 10^{-1}$
$\chi^2/\text{d.o.f}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$

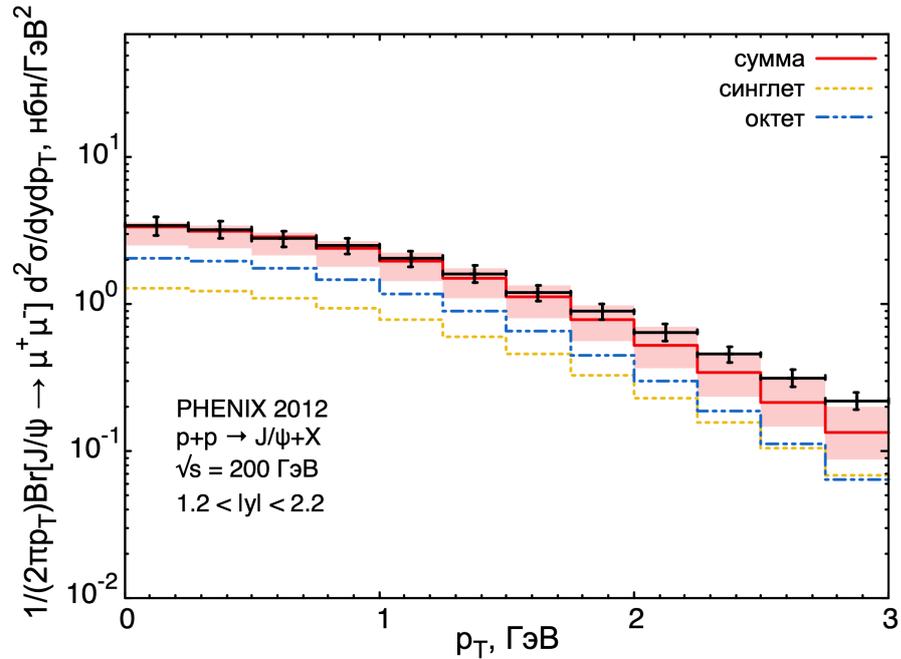


Рисунок 5 – Зависимость дифференциального сечения рождения J/ψ от поперечного импульса чармония p_T , сравнение полных синглетного и октетного вкладов в рождение J/ψ . Экспериментальные данные по рождению J/ψ коллаборации PHENIX [36]

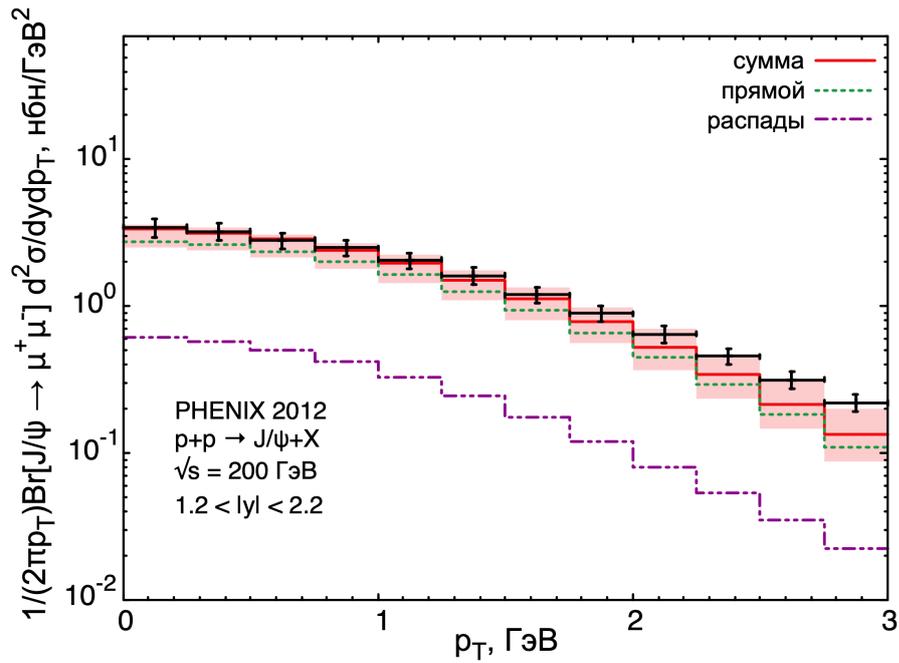


Рисунок 6 – Зависимость дифференциального сечения рождения J/ψ от поперечного импульса чармония p_T , сравнение прямого рождения J/ψ и вклада от распадов возбуждённых состояний чармония. Экспериментальные данные по рождению J/ψ коллаборации PHENIX [36]

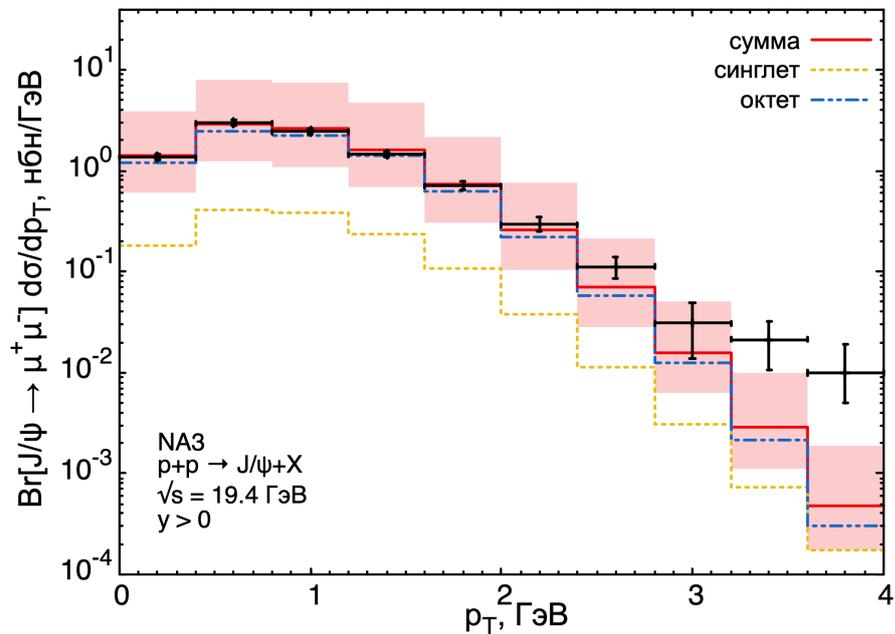


Рисунок 7 – Зависимость дифференциального сечения рождения J/ψ от поперечного импульса чармония p_T , сравнение полных синглетного и октетного вкладов в рождение J/ψ . Экспериментальные данные по рождению J/ψ коллаборации NA3 [37]

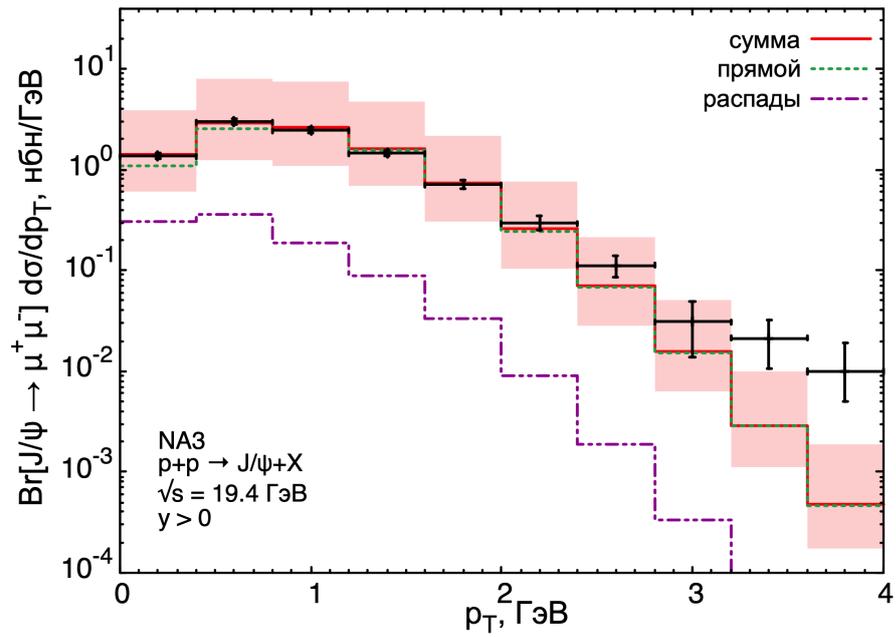


Рисунок 8 – Зависимость дифференциального сечения рождения J/ψ от поперечного импульса чармония p_T , сравнение прямого рождения J/ψ и вклада от распадов возбуждённых состояний чармония. Экспериментальные данные по рождению J/ψ коллаборации NA3 [37]

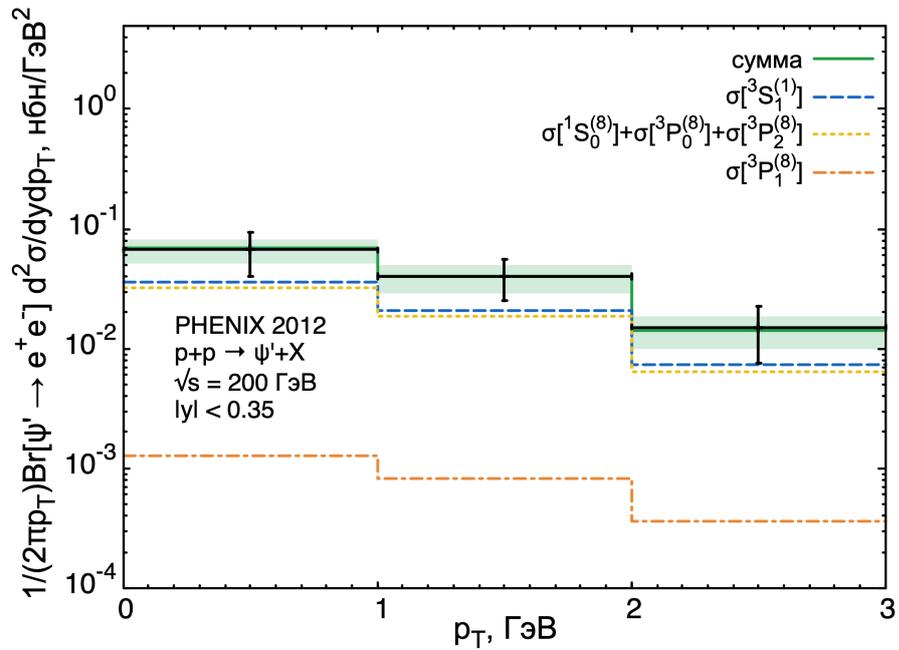


Рисунок 9 – Зависимость дифференциального сечения рождения ψ' от поперечного импульса чармония p_T в сравнении с экспериментальными данными коллаборации PHENIX [36]

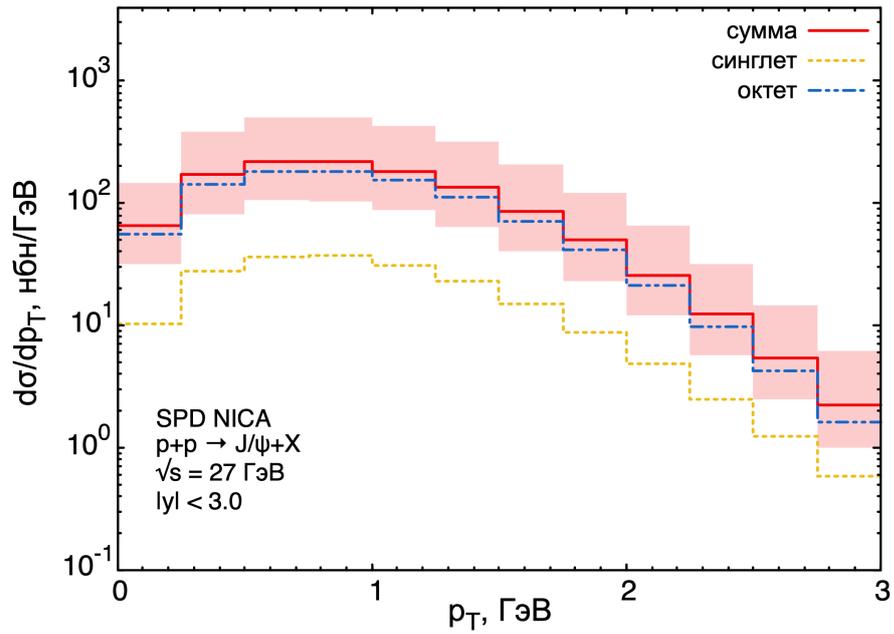


Рисунок 10 – Предсказания зависимости дифференциального сечения рождения J/ψ от поперечного импульса p_T для эксперимента SPD NICA, сравнение полных синглетного и октетного вкладов в рождение J/ψ

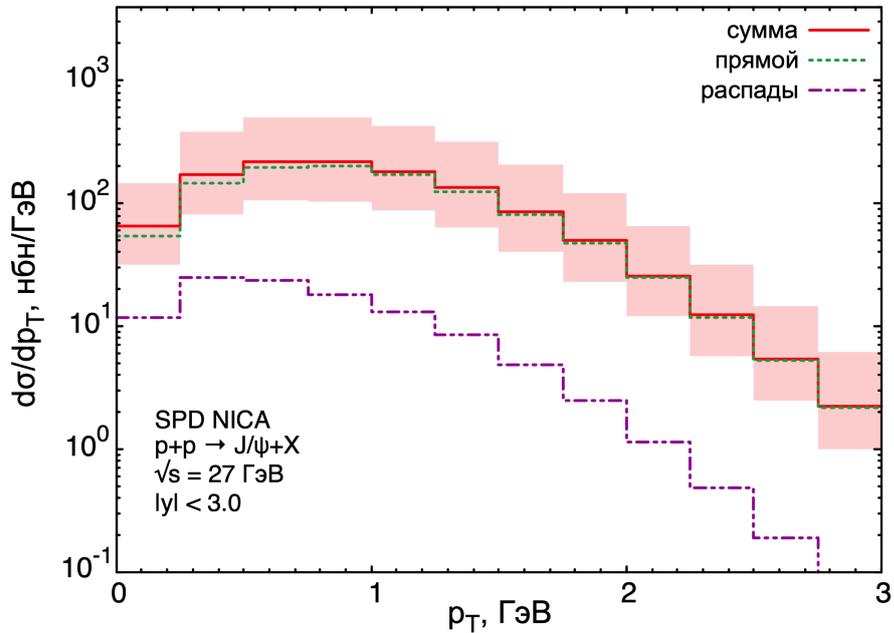


Рисунок 11 – Предсказания зависимости дифференциального сечения рождения J/ψ от поперечного импульса p_T для эксперимента SPD NICA, сравнение прямого рождения J/ψ и вклада от распадов возбуждённых состояний чармония

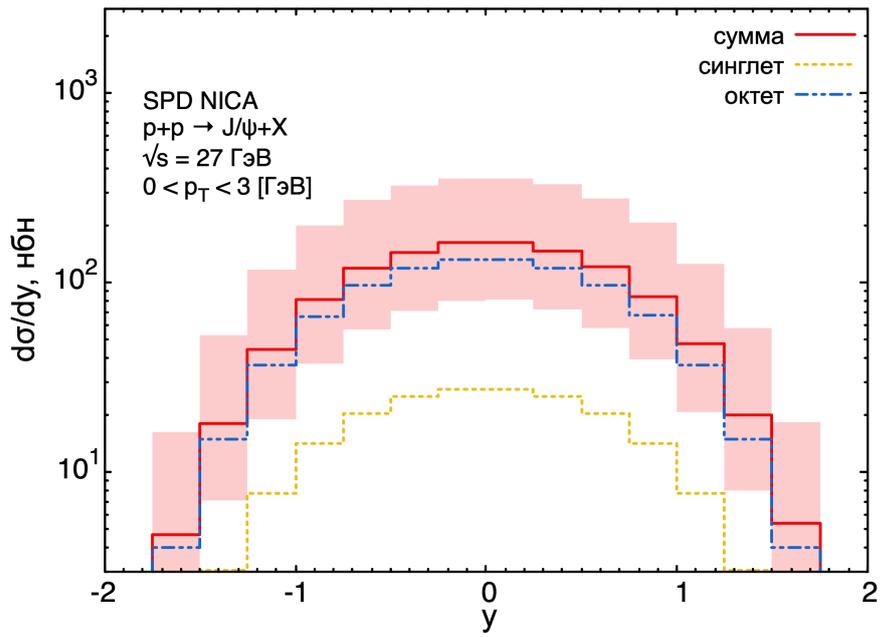


Рисунок 12 – Предсказания зависимости дифференциального сечения рождения J/ψ от быстроты y для эксперимента SPD NICA, сравнение полных синглетного и октетного вкладов в рождение J/ψ

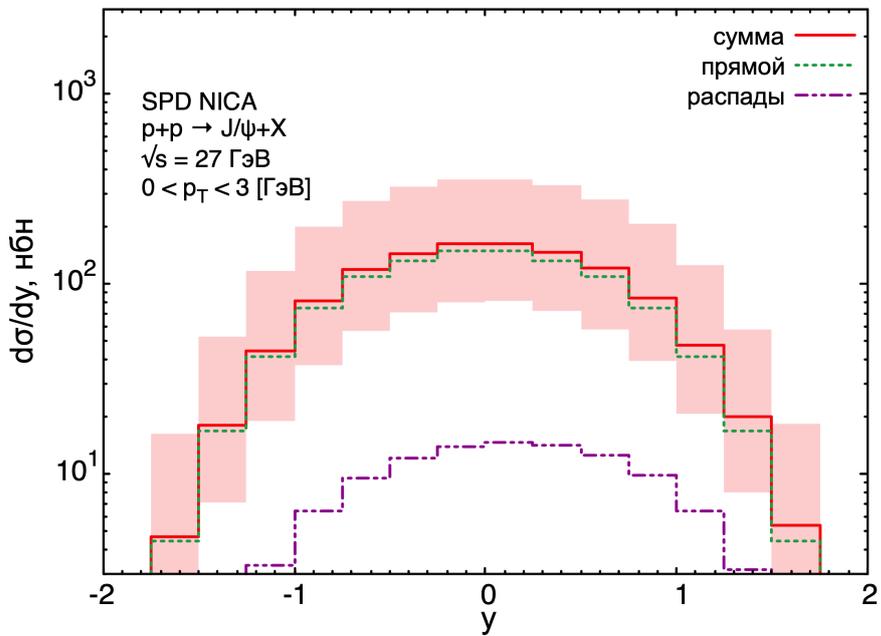


Рисунок 13 – Предсказания зависимости дифференциального сечения рождения J/ψ от быстроты y для эксперимента SPD NICA, сравнение прямого рождения J/ψ и вклада от распадов возбуждённых состояний чармония

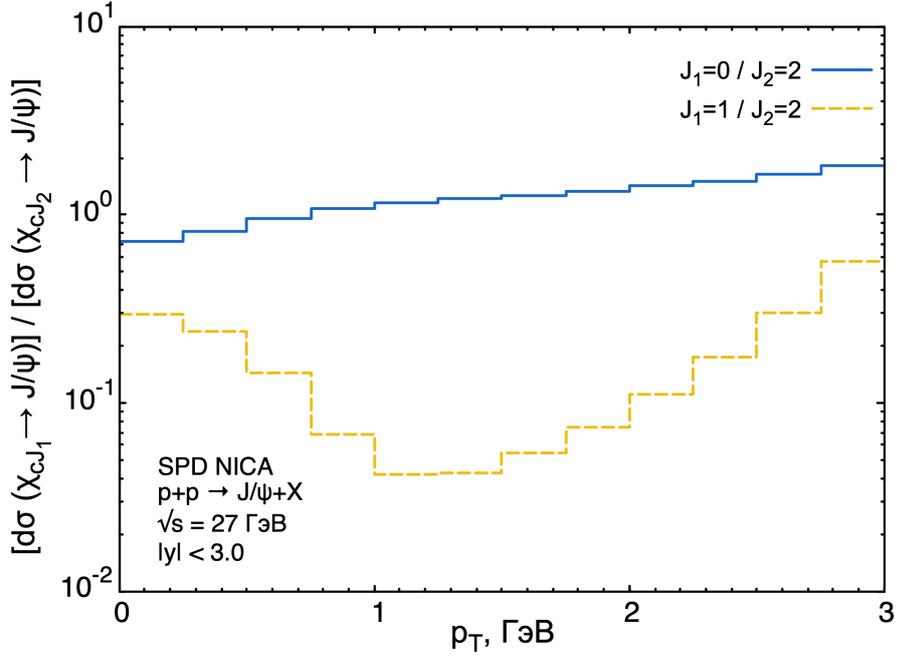


Рисунок 14 – Предсказания для отношений вкладов P -волновых состояний в рождение J/ψ в ОПМ для эксперимента SPD NICA

3.2 Поляризация в системе спиральности чармония

Поляризацию J/ψ можно исследовать по угловому распределению его лептонного распада в системе покоя чармония:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \lambda \cos^2 \theta + \mu \sin 2\theta \cos \varphi + \nu \sin^2 \theta \cos 2\varphi,$$

выражения для угловых коэффициентов λ , μ и ν можно записать в терминах сечений рождения J/ψ с различными направлениями спина:

$$\lambda = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{00}}{\sigma_{11} + \sigma_{00}} = \frac{\sigma_T - 2\sigma_L}{\sigma_T + 2\sigma_L} = \frac{\sigma - 3\sigma_L}{\sigma + \sigma_L},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{2} \operatorname{Re} \sigma_{01}}{\sigma_{11} + \sigma_{00}} = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{Re} \sigma_{01}}{\sigma + \sigma_L},$$

$$\nu = \frac{\operatorname{Re} \sigma_{1-1}}{\sigma_{11} + \sigma_{00}} = \frac{2 \operatorname{Re} \sigma_{1-1}}{\sigma + \sigma_L}.$$

Символами σ_{ij} ($i, j = \pm 1, 0$) обозначены сечения рождения J/ψ , матричные элементы которых пропорциональны произведениям векторов поляризации $\varepsilon_\mu(i) \varepsilon_\nu^*(j)$. Символам $\sigma_{T,L}$ соответствуют сечения рождения поперечно и продольно поляризованных J/ψ . Значение коэффициента λ описывает непосредственно поляризацию рождающихся J/ψ , а коэффициенты μ и ν отвечают одинарному и двойному повороту спина, это более тонкие эффекты, и измерить их по сравнению с коэффициентом λ сложнее, об этом говорит и меньшее

количество экспериментальных данных по μ и ν , поэтому далее сосредоточимся только на вычислении λ .

Расчёты для данных коллаборации PHENIX по измерению поляризации J/ψ изображены на рис. 15, построение границ коридора погрешностей для λ мы осуществляли с помощью выражений [38]

$$\lambda^{\text{above}} = \lambda^{\text{centre}} + \sqrt{\left(\lambda^{\mu_F, \text{max}} - \lambda^{\text{centre}}\right)^2 + \left(\lambda^{\mu_R, \text{max}} - \lambda^{\text{centre}}\right)^2},$$

$$\lambda^{\text{below}} = \lambda^{\text{centre}} - \sqrt{\left(\lambda^{\mu_F, \text{min}} - \lambda^{\text{centre}}\right)^2 + \left(\lambda^{\mu_R, \text{min}} - \lambda^{\text{centre}}\right)^2}.$$

Вычисления показывают практически не зависящее от p_T значение коэффициента $\lambda \approx 0.4$, что совершенно не согласуется с имеющимися экспериментальными данными и говорит, вероятно, о том, что НРКХД не подходит для описания рождения поляризованных чармониев по крайней мере в лидирующем порядке теории возмущений. Несмотря на расхождение расчётов для поляризации J/ψ с данными PHENIX, был вычислен коэффициент λ и для SPD NICA — предсказания для зависимости коэффициента λ от поперечного импульса p_T и быстроты y в рождении J/ψ и ψ' показаны на рис. 16 и 17.

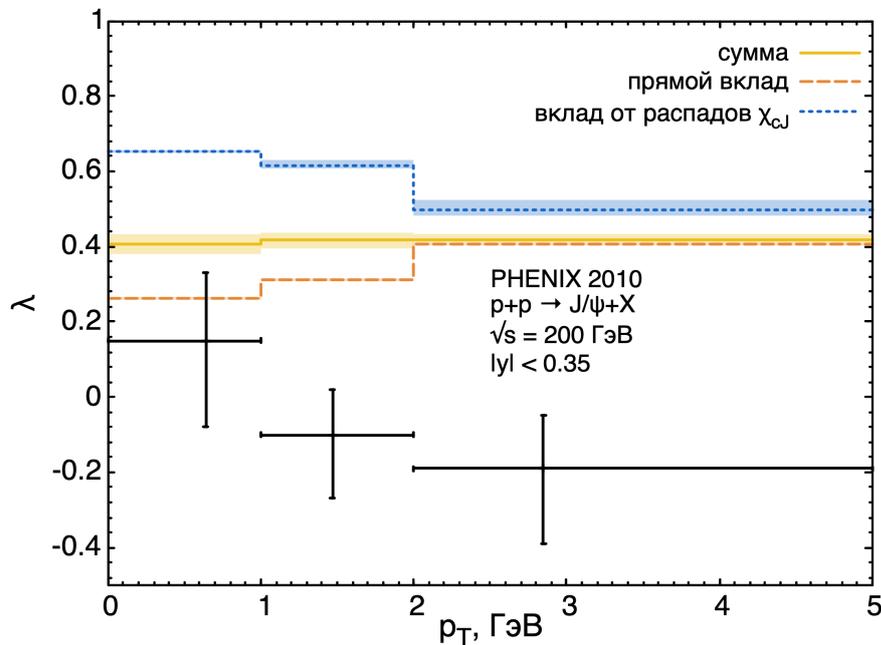


Рисунок 15 – Зависимость поляризации J/ψ от поперечного импульса p_T в ОПМ

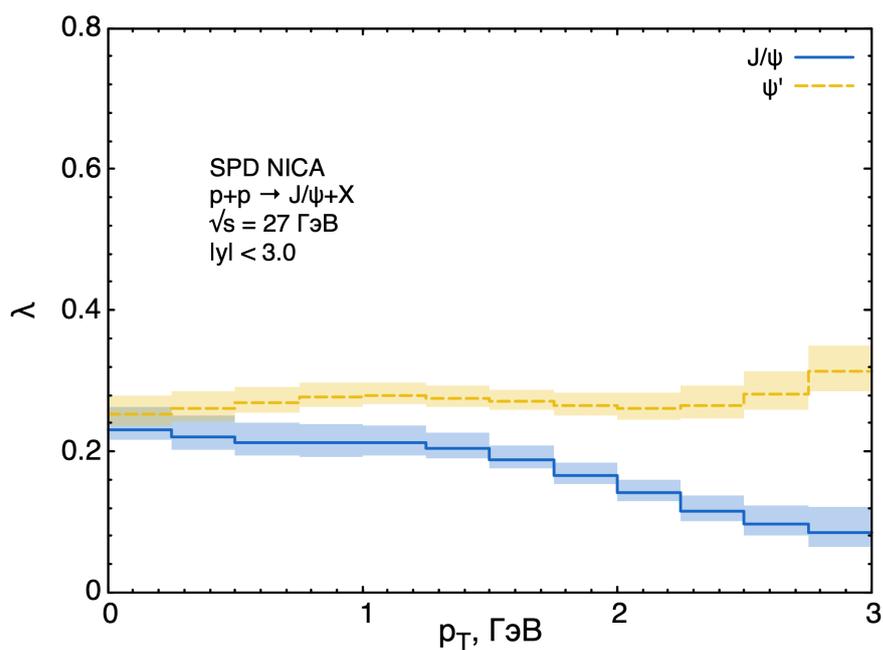


Рисунок 16 – Предсказания зависимости поляризации J/ψ и ψ' от поперечного импульса p_T в ОПМ для эксперимента SPD NICA

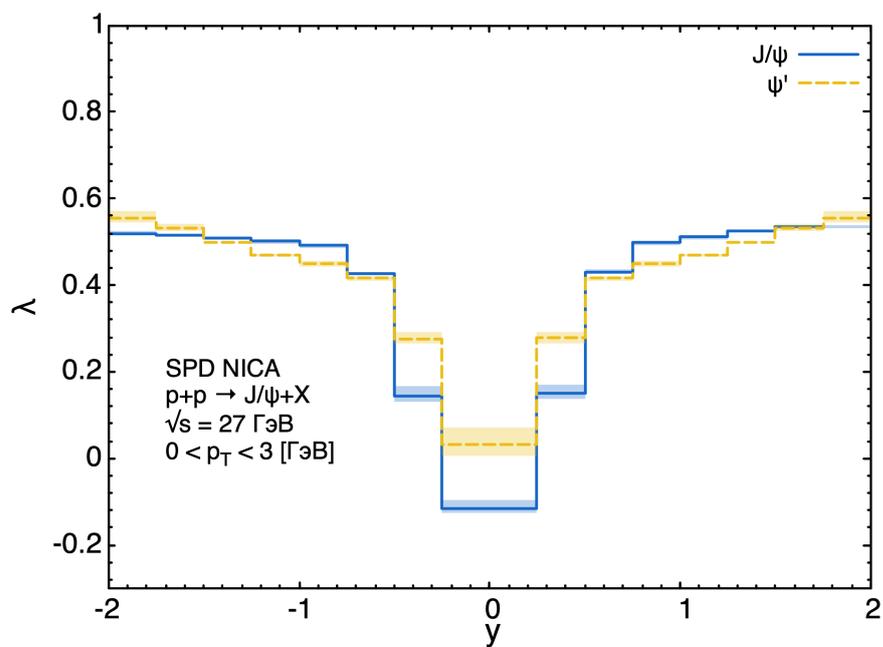


Рисунок 17 – Предсказания зависимости поляризации J/ψ и ψ' от быстроты y в ОПМ для эксперимента SPD NICA

Заключение

В работе были проведены вычисления рождения неполяризованного J/ψ в протон-протонных столкновениях в лидирующем приближении по константе связи в рамках подходов нерелятивистской квантовой хромодинамики и обобщённой партонной модели, являющейся феноменологической версией TMD-факторизации. На существующих экспериментальных данных были фитированы непертурбативные матричные элементы и средние значения квадратов поперечных импульсов начальных партонов. Кроме этого, была дана оценка параметра поляризации λ в рождении поляризованных J/ψ с учётом каскада распадов из возбуждённых состояний чармония. Фитированные параметры НРКХД и ОПМ были использованы для вычисления сечения рождения неполяризованных и поляризованных J/ψ мезонов в кинематике коллайдера NICA.

На сегодняшний день одной из важных задач физики высоких энергий является изучение внутренней структуры протона. Приведённые в работе вычисления, в частности, извлечение параметров партонных распределений из экспериментальных данных, дают возможность получить больше информации о непертурбативной структуре протона и оценить сечения рождения и спектры чармониев для будущих экспериментов, в том числе при более низких энергиях ускорителя NICA. Также совместный подход НРКХД и ОПМ был проверен в части предсказания поляризации J/ψ , вероятно, здесь можно утверждать о несостоятельности такого подхода хотя бы в лидирующем порядке теории возмущений.

Результаты проделанной работы были представлены на XIX Совецании по высокоэнергетической спиновой физике DSPIN-23 в ОИЯИ и изложены в статьях [39, 40].

В дальнейшем планируется провести аналогичные расчёты в подходе TMD-факторизации [28], по сравнению с ОПМ более последовательном и теоретически обоснованном. Хотя область применимости TMD-факторизации довольно мала, она позволит извлечь данные о движении кварков и глюонов в протоне в узкой области малых поперечных импульсов, а совместно с вычислениями в коллинеарной факторизации даст возможность описать весь экспериментально доступный интервал поперечных импульсов конечных состояний.

Список литературы

1. Gell-Mann, M. The eighthfold way: a theory of strong interaction symmetry [Text] / M. Gell-Mann. — 1961.
2. Ne'eman, Y. Derivation of strong interactions from a gauge invariance [Text] / Y. Ne'eman // Nuclear Physics. — 1961. — Vol. 26, no. 2. — P. 222–229.
3. Zweig, G. An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1 [Text] / G. Zweig. — 1964.
4. Zyla, P. A. Review of Particle Physics [Text] / P. A. Zyla, [et. al.] – Particle Data Group // Prog. Theor. Exp. Phys. — 2020. — Vol. 2020. — P. 083C01.
5. Клоуз, Ф. Кварки и партоны: Введение в теорию [Текст] / Ф. Клоуз. — Москва : «Мир», 1982.
6. Пескин, М. Введение в квантовую теорию поля [Текст] / М. Пескин, Д. Шрёдер. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
7. Вильчек, Ф. А. Асимптотическая свобода: от парадоксов к парадигмам [Текст] / Ф. А. Вильчек // Успехи физических наук. — 2005. — Т. 175. — С. 1325–1337.
8. Discovery of a narrow resonance in e^+e^- annihilation [Text] / J. E. Augustin, A. M. Boyarski, M. Breidenbach [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1974. — Vol. 33. — P. 1406–1408.
9. Experimental observation of a heavy particle J [Text] / J. J. Aubert, U. Becker, P. J. Biggs [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1974. — Vol. 33. — P. 1404–1406.
10. Bodwin, Geoffrey T. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium [Text] / Geoffrey T. Bodwin, Eric Braaten, G. Peter Lepage // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 51. — P. 1125–1171.
11. Martin, A. A fit of upsilon and charmonium spectra [Text] / A. Martin // Phys. Lett. — 1980. — Vol. 93B. — P. 338–342.
12. Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics [Text] / G. Peter Lepage, Lorenzo Magnea, Charles Nakhleh [et al.] // Phys. Rev. D. — 1992. — Vol. 46. — P. 4052–4067.
13. Kühn, Johann H. Electromagnetic Annihilation of e^+e^- Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation [Text] / Johann H. Kühn, Jean Kaplan, El Ghali Oudrhiri Safiani // Nucl. Phys. B. — 1979. — Vol. 157. — P. 125–144.
14. Berger, Edmond L. Inelastic photoproduction of J/ψ and Υ by gluons [Text] / Edmond L. Berger, D. Jones // Phys. Rev. D. — 1981. — Vol. 23. — P. 1521–1530.

15. Baier, R. Hadronic Collisions: A Quarkonium Factory [Text] / R. Baier, R. Rückl // Zeitschrift für Physik C. — 1983. — Vol. 19. — P. 251.
16. Eichten, Estia J. Quarkonium wave functions at the origin [Text] / Estia J. Eichten, Chris Quigg // Physical Review D. — 1995. — Vol. 52, no. 3. — P. 1726–1728.
17. Cho, Peter. Color-octet quarkonia production [Text] / Peter Cho, Adam K. Leibovich // Phys. Rev. D. — 1996. — Vol. 53. — P. 150–162.
18. Beneke, M. Inelastic photoproduction of polarized J/ψ [Text] / M. Beneke, M. Krämer, M. Vanttinen // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol. 57. — P. 4258–4274.
19. Kniehl, Bernd. Polarized J/ψ from χ_{cJ} and ψ' decays at the Fermilab Tevatron [Text] / Bernd Kniehl, Jungil Lee // Physical Review D. — 2000. — Vol. 62, no. 11.
20. Cho, Peter L. Gluon fragmentation into polarized charmonium [Text] / Peter L. Cho, Mark B. Wise, Sandip P. Trivedi // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 51. — P. R2039–R2043.
21. Complete Next-to-Leading-Order Study on the Yield and Polarization of $\Upsilon(1S, 2S, 3S)$ at the Tevatron and LHC [Text] / Bin Gong, Lu-Ping Wan, Jian-Xiong Wang, Hong-Fei Zhang // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 112. — P. 032001.
22. Taylor, R. E. Nucleon form factors above 6 GeV [Text] / R. E. Taylor. — 1967.
23. Friedman, Jerome I. Deep inelastic electron scattering [Text] / Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. — 1972. — Vol. 22. — P. 203–254.
24. Evidence for Jet Structure in Hadron Production by e^+e^- Annihilation [Text] / G. Hanson, G. S. Abrams, A. M. Boyarski [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1975. — Vol. 35. — P. 1609–1612.
25. Discovery of Three-Jet Events and a Test of Quantum Chromodynamics at PETRA [Text] / D. P. Barber, U. Becker, H. Benda [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 43. — P. 830–833.
26. Double Parton Scattering in pp Collisions at $\sqrt{s} = 63$ GeV [Text] / T. Åkesson, M. G. Al-brow, S. Almeded, O. Benary // Z. Phys. C. — 1987. — Vol. 34. — P. 163.
27. High-Energy Single-Arm Inelastic $e - p$ and $e - d$ Scattering at 6° and 10° [Text] / J. S. Poucher, M. Breidenbach, R. Ditzler [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1974. — Vol. 32. — P. 118–121.
28. Collins, John C. Foundation of Perturbative QCD [Text] / John C. Collins. — [S. 1.] : Cambridge University Press, 2011.

29. D’Alesio, U. Towards a first estimate of the gluon Sivers function from A_N data in pp collisions at RHIC [Text] / U. D’Alesio, F. Murgia, C. Pisano // JHEP. — 2015. — Vol. 09. — P. 119.
30. Probing the gluon Sivers function in $p^\uparrow p \rightarrow J/\psi X$ and $p^\uparrow p \rightarrow DX$ [Text] / Umberto D’Alesio, Francesco Murgia, Cristian Pisano, Pieter Taelens // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96. — P. 036011.
31. Hahn, T. Cuba — a library for multidimensional numerical integration [Text] / T. Hahn // Computer Physics Communications. — 2005. — Vol. 168, no. 2. — P. 78–95.
32. Shtabovenko, Vladyslav. FeynCalc 9.3: New features and improvements [Text] / Vladyslav Shtabovenko, Rolf Mertig, Frederik Orellana // Comput. Phys. Commun. — 2020. — Vol. 256. — P. 107478.
33. Hahn, Thomas. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 [Text] / Thomas Hahn // Comput. Phys. Commun. — 2001. — Vol. 140. — P. 418–431.
34. Parton distributions for the LHC [Text] / A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne, G. Watt // Eur. Phys. J. C. — 2009. — Vol. 63. — P. 189–285.
35. Braaten, Eric. Polarization of prompt J/ψ at the Tevatron [Text] / Eric Braaten, Bernd A. Kniehl, Jungil Lee // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 62. — P. 094005.
36. Adare, A. Ground and excited charmonium state production in $p+p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV [Text] / A. Adare [et al.] // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 85. — P. 092004.
37. Badier, J. Experimental J/ψ Hadronic Production from 150-GeV/c to 280-GeV/c [Text] / J. Badier [et al.] // Zeitschrift für Physik C. — 1983. — Vol. 20. — P. 101.
38. Nelson, R. E. Narrowing the uncertainty on the total charm cross section and its effect on the J/ψ cross section [Text] / R. E. Nelson, R. Vogt, A. D. Frawley // Phys. Rev. C. — 2013. — Vol. 87. — P. 014908.
39. Карпишков, А. В. Рождение поляризованных J/ψ на коллайдере NICA в НРКХД и обобщённой партонной модели [Текст] / А. В. Карпишков, В. А. Салеев, К. К. Шилиев // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. — 2024. — Т. 30, № 1. — С. 96–111.
40. Карпишков, А. В. Рождение поляризованных J/ψ -мезонов в НРКХД и обобщённой партонной модели [Текст] / А. В. Карпишков, В. А. Салеев, К. К. Шилиев // Ядерная физика. — 2024. — Т. 87, № 4. — [в печати].

Приложение. Программа расчёта сечения для партонного подпроцесса $2 \rightarrow 1$

```
Program ccbar

real*8 MASS, sqrtS, YMIN, YMAX, PTMIN, PTMAX,
  &Value, alphaSorder, alphaSQ0, alphaSMZ, mCAS, mBAS,
  &mTAS, relacc, key, TIMIN, TIMAX, TIMID, ValueMin, ValueMax,
  &MUa, MUp
integer ndim, ncomp, last, seed, mineval, maxeval, nnew, Spectr
double precision epsrel, epsabs, userdata, flatness
parameter (userdata = 0)
parameter (ncomp = 1)
parameter (ndim = 4)
parameter (epsabs = 1D-17)
parameter (last = 4)
parameter (seed = 22)
parameter (key = 9)
parameter (mineval = 0)
parameter (maxeval = 2D9)
parameter (nnew = 1D7)
parameter (flatness = 1D0)

*****_For_Cuba-4.2_*****

integer nmin, nvec
integer*8 spin
character*(*) statefile
parameter (nmin = 1D7)
parameter (nvec = 1)
parameter (statefile="")
parameter (spin = -1)

*****

external integrand

real*8, Dimension(:), Allocatable :: integral, error, prob
integer verbose, nregions, neval, fail, NumValues, iParton
character*100 CIFile, OutFile
character*200 prefix
character*3 SpecStr, Parton
character*256 ValueFile, Path, homedir, str
character*400 PathToPDFs
logical file_exists

*****_Block_of_observables_*****

real*8, Dimension(:, :), Allocatable :: Values

*****

Common/Spect/Spectr
Common/initParton/iParton
Common/PDFpath/PathToPDFs
Common/Pars/MASS, sqrtS, YMIN, YMAX, PTMIN, PTMAX, TIMIN, TIMAX
Common/Par2/TIMID, MUa, MUp
Common/Values/ValueMin, ValueMax

*****_Format_of_results_to_print_*****
```

```

1 FORMAT( '_PTMIN_=',F6.4,'_PTMAX_=',F6.4,'_CS_=',F20.10,
&'_nb_{}_ERR_=',F6.3,'%')
2 FORMAT( '_YMIN_=',F7.4,'_YMAX_=',F7.4,'_CS_=',F20.10,
&'_nb_{}_ERR_=',F6.3,'%')
3 FORMAT( '_PTMIN_=',F6.4,'_PTMAX_=',F6.4,'_CS_=',F20.10,
&'_nb_{}_ERR_=',F6.3,'%')

***** _Initial_alpha_S_ *****

alphaSOrder=0

c alpha_s(1GeV)_from_MSTW-2008_LO_5-flav

alphaSQ0=0.68183d0

c Flavour_at_m_c_and_m_b

mCAS=1.4d0
mBAS=4.75d0

c m_t=infinity

mTAS=1.0d10
CALL INITALPHAS(alphaSOrder,1.D0,1.D0,alphaSQ0,mCAS,mBAS,mTAS)

***** _Path_to_working_directory_ *****

CALL getenv('HOME',homedir)
CALL getcwd(Path)
PathToPDFs=trim(homedir)//'/new_test/PDFs/MSTW2008lo/mstw2008lo'

CALL GETARG(1,prefix)
CIFile=trim(prefix)

***** _Initial_data_ *****

Open(unit=1,file=CIFile)
Read(1,*) Str
Read(1,*) epsrel
Write(*,*) 'Relative_accuracy=',epsrel
Read(1,*) Str
Read(1,*) MASS
Write(*,*) 'MASS=',MASS
Read(1,*) Str
Read(1,*) sqrtS
Write(*,*) 'sqrtS=',sqrtS
Read(1,*) Str
Read(1,*) Parton
Write(*,*) 'Initial_parton:',trim(Parton)
Read(1,*) Str
Read(1,*) MUa
Write(*,*) 'MUa=',MUa
Read(1,*) Str
Read(1,*) MUp
Write(*,*) 'MUp=',MUp
Read(1,*) Str
Read(1,*) YMIN
Write(*,*) 'YMIN=',YMIN
Read(1,*) Str
Read(1,*) YMAX
Write(*,*) 'YMAX=',YMAX

```

```

Read(1,*) Str
Read(1,*) PTMIN
Write(*,*) 'PTMIN_=',PTMIN
Read(1,*) Str
Read(1,*) PTMAX
Write(*,*) 'PTMAX_=',PTMAX
Read(1,*) Str
Read(1,*) TIMIN
Write(*,*) 'TMIN_=',TIMIN
Read(1,*) Str
Read(1,*) TIMAX
Write(*,*) 'TMAX_=',TIMAX
Read(1,*) Str
Read(1,*) TIMID
Write(*,*) 'TMID_=',TIMID
Read(1,*) Str
Read(1,*) SpecStr
Write(*,*) 'Spectrum_observable:_',SpecStr
Read(1,*) Str
Read(1,*) ValueFile
Write(*,*) 'File_with_values_of_observables:_',trim(ValueFile)
Read(1,*) Str
Read(1,*) OutFile
Write(*,*) 'Output:_',trim(OutFile)
Read(1,*) Str
Read(1,*) verbose
Write(*,*) 'Verbose:_',verbose
Close(1)

Spectr=0
IF (SpecStr=='PT') Spectr=1
IF (SpecStr=='Y') Spectr=2
IF (SpecStr=='YPT') Spectr=3

Write(*,*) 'Reading:_',CIFILE

IF (Spectr==0) THEN
Write(*,*)
Write(*,*) '!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!'
Write(*,*) "Halt!_Check_the_name_of_CalcInit_file!_It's_wrong!"
Write(*,*) '!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!'
STOP
ENDIF

IF (Spectr==1) PRINT*, "It's_a_PT_spectrum!"
IF (Spectr==2) PRINT*, "It's_a_Y_spectrum!"
IF (Spectr==3) PRINT*, "It's_a_Y_PT_spectrum!"

*****_Reading_the_value_file_*****

INQUIRE(FILE=trim(ValueFile), EXIST=file_exists)
IF (.NOT.(file_exists)) THEN
Write(*,*)
Write(*,*) '!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!'
Write(*,*) ValueFile
Write(*,*) 'ERROR:_ValueFile_does_not_exist!'
Write(*,*) '!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!'
STOP
ENDIF

Write(*,*)
Write(*,*) 'Reading:_', trim(ValueFile)

```

```

Write(*,*)

Open(unit=1, file=trim(ValueFile))

Read(1,*) NumValues

Allocate(Values(NumValues,2))

DO i=1,NumValues
Read(1,*) Values(i,1), Values(i,2)
ENDDO

IF (NumValues==1) THEN
Write(*,'(I3,A)') NumValues, '_bin_has_been_read.'
Write(*,*)
ELSE IF (NumValues>1) THEN
Write(*,'(I3,A)') NumValues, '_bins_have_been_read.'
Write(*,*)
ENDIF

Close(1)

Allocate(integral(ncomp))
Allocate(error(ncomp))
Allocate(prob(ncomp))

*****_Kind_of_initial_parton_*****

IF (Parton=='q') THEN
iParton=1
OutFile='qqbar_'//OutFile
ELSE IF (Parton=='g') THEN
iParton=2
OutFile='gg_'//OutFile
ELSE
Write(*,*)
Write(*,*) '!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!'
Write(*,*) 'Halt!_Initial_parton_must_be_only_q_or_g!'
Write(*,*) '!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!'
STOP
ENDIF

DO iValue=1,NumValues
ValueMin=Values(iValue,1)
ValueMax=Values(iValue,2)

*****_Cuba-4.2_(choice_of_routine)_*****

call suave(ndim, ncomp, integrand, userdata, nvec,
& epsrel, epsabs, verbose, seed, mineval, maxeval,
& nnew, nmin, flatness, statefile, spin,
& nregions, neval, fail, integral, error, prob)

*****_Choice_of_output_format_*****

Open(unit=2, file=OutFile, position='APPEND')

SELECT CASE (Spectr)

CASE (1)

Write(*,*)

```

```

Write(*,1) ValueMin,ValueMax,integral(1),
&(error(1)/integral(1))*100.d0
Write(2,1) ValueMin,ValueMax,integral(1),
&(error(1)/integral(1))*100.d0

CASE (2)

Write(*,*)
Write(*,2) ValueMin,ValueMax,integral(1),
&(error(1)/integral(1))*100.d0
Write(2,2) ValueMin,ValueMax,integral(1),
&(error(1)/integral(1))*100.d0

CASE (3)

Write(*,*)
Write(*,3) ValueMin,ValueMax,integral(1),
&(error(1)/integral(1))*100.d0
Write(2,3) ValueMin,ValueMax,integral(1),
&(error(1)/integral(1))*100.d0

CASE DEFAULT
END SELECT

Close(2)

ENDDO

DEALLOCATE(integral)
DEALLOCATE(error)
DEALLOCATE(prob)
DEALLOCATE(Values)

END PROGRAM cobar

integer function integrand(ndim, x, ncomp, FUN)
implicit real*8 (A-H,K,M,O-Z)
Character*256 PathToPDFs, PDF
Common/ Spect/ Spectr
Common/ initParton/ iParton
Common/ PDFpath/ PathToPDFs
Common/ Pars/ MASS, sqrtS, YMIN, YMAX, PTMIN, PTMAX, T1MIN, T1MAX
Common/ Par2/ T1MID, MUa, MUp
Common/ Values/ ValueMin, ValueMax
Real*8 Jacobian, MUa, MUp, MASS, PT1, AMPL
double precision iMTa, iMTp, iALS, LDME, iM_T1, X1, X2, S_hat
integer ndim, ncomp, Spectr

real*8 x(*), fun(*)

PI=DACOS(-1.D0)
S=sqrtS**2

FUN(1)=0.D0

*****_Variables_for_integration_*****

SELECT CASE (Spectr)

CASE (1)

Shift=MASS/3.096D0

```

```

Yc=YMIN+(YMAX-YMIN)*X(1)
Phi1=2*PI*X(2)
T1=T1MIN+(T1MAX-T1MIN)*X(3)
PT1=Shift*(ValueMin+(ValueMax-ValueMin)*X(4))
iM_T1=DSQRT(PT1**2+MASS**2)
T2=PT1**2+T1-2*PT1*DSQRT(T1)*DCOS(Phi1)
det=(iM_T1**2-T1-T2)**2-4*T1*T2

Jacobian=(YMAX-YMIN)*(2*PI)*(T1MAX-T1MIN)
      &*(ValueMax-ValueMin)

CASE (2)

Shift=MASS/3.096D0

PT1=Shift*(PTMIN+(PTMAX-PTMIN)*X(1))
Phi1=2*PI*X(2)
T1=T1MIN+(T1MAX-T1MIN)*X(3)
Yc=ValueMin+(ValueMax-ValueMin)*X(4)
iM_T1=DSQRT(PT1**2+MASS**2)
T2=PT1**2+T1-2*PT1*DSQRT(T1)*DCOS(Phi1)
det=(iM_T1**2-T1-T2)**2-4*T1*T2

Jacobian=(PTMAX-PTMIN)*(2*PI)*(T1MAX-T1MIN)*
      &(ValueMax-ValueMin)

CASE (3)

Shift=MASS/3.096D0

Yc=YMIN+(YMAX-YMIN)*X(1)
Phi1=2*PI*X(2)
T1=T1MIN+(T1MAX-T1MIN)*X(3)
PT1=Shift*(ValueMin+(ValueMax-ValueMin)*X(4))
iM_T1=DSQRT(PT1**2+MASS**2)
T2=PT1**2+T1-2*PT1*DSQRT(T1)*DCOS(Phi1)
det=(iM_T1**2-T1-T2)**2-4*T1*T2

Jacobian=(YMAX-YMIN)*(2*PI)*(T1MAX-T1MIN)
      &*(ValueMax-ValueMin)

CASE DEFAULT
END SELECT

XP1=DEXP(Yc)*(iM_T1**2+T1-T2+DSQRT(det))/(2*iM_T1*sqrtS)
XM1=DEXP(Yc)*(iM_T1**2+T1-T2-DSQRT(det))/(2*iM_T1*sqrtS)
XP2=DEXP(-Yc)*(iM_T1**2-T1+T2+DSQRT(det))/(2*iM_T1*sqrtS)
XM2=DEXP(-Yc)*(iM_T1**2-T1+T2-DSQRT(det))/(2*iM_T1*sqrtS)

X1=XP1
X2=XP2

*****_Check_of_X1_and_X2_*****

IF (det<0.D0) goto 6

IF (X1<1.D-6.OR.X1>1.D0.OR.X2<1.D-6.OR.X2>1.D0) goto 6

*****_Scale_of_interaction_(mu)_*****

iMTa=iM_T1*MUa

```

```

iMTp=iM_T1*MUp
MT2=iM_T1**2

IF (MT2<1.D0) goto 6
IF (MT2>5.D6) goto 6

*****_Coupling_constant_*****

iALS=ALPHAS(iMTa)

*****_Check_of_q1z_and_q2z_*****

IF ((X1*sqrtS/2-T1/(2*sqrtS*X1))<0) goto 6
IF ((-X2*sqrtS/2+T2/(2*sqrtS*X2))>0) goto 6

*****

SELECT CASE (iParton)

CASE (1)

*****_PDFs_and_Amplitude_1_(qbar,_MSTW2008LO)_*****

U1 = GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X1,iMTp,2)/X1
aU1 = GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X2,iMTp,-2)/X2
D1 = GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X1,iMTp,1)/X1
aD1 = GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X2,iMTp,-1)/X2
S1 = GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X1,iMTp,3)/X1
aS1 = GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X2,iMTp,-3)/X2

SUMM=(U1*aU1+D1*aD1+S1*aS1)*DEXP(-T1/T1MID)*DEXP(-T2/T1MID)
      &/(PI*T1MID)**2

AMPL=16*(iALS*PI)**2/(9*MASS)          ! JPsi[3S18]

*****_PDFs_and_Amplitude_2_(gg,_choice_of_PDF)_*****

CASE (2)

c MSTW2008LO (switch one in Calc.sh file)

CP1=GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X1,iMTp,0)/X1
CP2=GetOnePDF(trim(PathToPDFs),0,X2,iMTp,0)/X2

*****

SUMM=(CP1*DEXP(-T1/T1MID))*(CP2*DEXP(-T2/T1MID))/(PI*T1MID)**2

*****

AMPL1=8*(iALS*PI)**2*0.089D0/(3*MASS**3)          ! ChiC0[3P01]

AMPL2=5*(iALS*PI)**2/(12*MASS)          ! JPsi[1S08]

AMPL3=32*(iALS*PI)**2*5*0.089D0/(45*MASS**3)          ! ChiC2[3P21]

AMPL30=5*0.089D0*64*((PI*iALS)*(MASS*MASS-S*X1*X2))**2/
      &(15*MASS**3*(S*(X1+X2)**2-4*MASS*MASS)**2)

AMPL31=5*0.089D0*128*(PI*iALS)**2*(2*MASS**4+S**2*X1*X2*(X1**2+
      &X2**2)-MASS**2*S*(X1+X2)**2)/
      &(45*MASS**3*(S*(X1+X2)**2-4*MASS**2)**2)

```

```

AMPL32=5*0.089D0*32*(PI*iALS)**2*(2*MASS**4+S**2*(X1**4+X2**4)-
&4*MASS**2*S*(X1**2+X2**2-X1*X2))
&/(45*MASS**3*(S*(X1+X2)**2-4*MASS**2)**2)

```

```

AMPL4=5*(iALS*PI)**2/(12*MASS)           ! JPsi[1S08]

```

```

AMPL5=5*(iALS*PI)**2/(MASS**3)          ! JPsi[3P08]

```

```

AMPL6=4*(iALS*PI)**2/(3*MASS**3)        ! JPsi[3P28]

```

```

AMPL=AMPL1

```

```

CASE DEFAULT

```

```

END SELECT

```

```

IF (AMPL<0.D0) THEN

```

```

  Print *, 'AMPL=',AMPL

```

```

  goto 6

```

```

ENDIF

```

```

*****_Integrand_*****

```

```

FUN(1)=(PI**2)*PT1*SUMM*AMPL
&*0.38938D0*1.D6*Jacobian*Shift/(S*DSQRT(det))

```

```

*****

```

```

SELECT CASE (Spectr)

```

```

CASE (3)

```

```

FUN(1)=FUN(1)/(2*PI*PT1*(YMAX-YMIN))

```

```

CASE DEFAULT

```

```

END SELECT

```

```

FUN(1)=FUN(1)/(ValueMax-ValueMin)

```

```

6      Continue

```

```

      integrand=0

```

```

end function integrand

```