

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева  
(Самарский университет)

Естественнонаучный институт

Физический факультет

Кафедра общей и теоретической физики

Выпускная квалификационная работа

**Ассоциативное рождение  $J/\psi$ -мезонов и фотонов при высоких энергиях**

По направлению подготовки 03.04.02 Физика

(уровень магистратуры)

направленность (профиль) Квантовые системы и квантовые технологии

Обучающийся \_\_\_\_\_ Алимов Л.Э.

Руководитель ВКР

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Салеев В.А.

Самара, 2024 г.

## Реферат

**Выпускная квалификационная работа:** 56 с., 11 рисунков, 32 источника, 2 приложения.

ТЯЖЕЛЫЕ КВАРКОНИИ, ЧАРМОНИЙ, ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ, КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА, МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, CUVA, SPD NICA, ПАРТОННЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ, МОДЕЛИ АДРОНИЗАЦИИ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА, МОДЕЛЬ ЦВЕТОВЫХ СИНГЛЕТОВ.

Целью данной работы является предсказание и анализ дифференциальных сечений ассоциативного рождения  $J/\psi$ -мезонов и фотонов при энергии коллайдера NICA  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ в рамках обобщенной партонной модели (ОПМ), используя разные механизмы адронизации нерелятивистскую квантовую хромодинамика (НРКХД) и улучшенную модель испарения цвета (уМИЦ).

В первой главе приводится краткое описание построения лагранжиана квантовой хромодинамики (КХД), приведены соответствующие правила Фейнмана. Обсуждается эволюция константы связи сильного взаимодействия по жесткому масштабу.

Во второй главе описывается формализм факторизации сечений в адронных столкновениях, изложены основные положения коллинеарной партонной модели (КПМ), описывается эволюция неинтегрированных партонных функций распределений (нПФР) по жесткому масштабу и дано феноменологическое расширение коллинеарной факторизации, называемое обобщенной партонной моделью (ОПМ).

В третьей главе приводится обзор используемых моделей адронизации: улучшенной модели испарения цвета (уМИЦ), модели нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД) и её частного случая модели цветных синглетов (МЦС).

В четвертой главе приводятся формулы для расчета дифференциальных сечений с учетом особенностей ОПМ и отдельно приведены формулы для расчета дифференциального сечения дополнительно с учетом особенностей уМИЦ.

В пятой главе описаны методы интегрирования Монте-Карло используемые для стохастического вычисления многомерных интегралов при расчете дифференциальных сечений.

В шестой главе приведены результаты фитирования экспериментальных данных экспериментов NA3 [1] и PHENIX [2] с целью фиксации параметров ОПМ и уМИЦ, проводится анализ эффективности описания экспериментальных данных с фиксированными параметрами модели. Приведены результаты предсказаний дифференциальных сечений и корреляций ассоциативно-

го рождения  $J/\psi$ -мезонов и фотонов при энергии будущего эксперимента SPD NICA  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ. Проводится обсуждение результатов.

В приложении **A** приведены явные выражение используемых матричных элементов, за исключением матричного элемента  $\overline{|M|^2}(g+g \rightarrow c+\bar{c}+\gamma)$ , который не может быть здесь приведен из-за своей громоздкости.

В приложении **B** приведены оригинальные тексты программ на языке программирования `c++`, разработанные в результате работы.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Квантовая хромодинамика</b>	<b>8</b>
1.1 Введение в КХД . . . . .	8
1.2 Эволюция константы связи . . . . .	13
<b>2 Факторизация сечений</b>	<b>17</b>
2.1 Коллинеарная партонная модель . . . . .	17
2.2 Обобщенная партонная модель . . . . .	19
<b>3 Модели адронизации</b>	<b>20</b>
3.1 Улучшенная модель испарения цвета . . . . .	20
3.2 Нерелятивистская квантовая хромодинамика . . . . .	21
<b>4 Сечения рождения</b>	<b>24</b>
4.1 Сечение $2 \rightarrow n$ ОПМ . . . . .	24
4.2 Сечение $J/\psi + \gamma$ в ОПМ-уМИЦ . . . . .	25
<b>5 Метод Монте-Карло</b>	<b>27</b>
5.1 Наивное интегрирование . . . . .	27
5.2 Выборка по занчимости . . . . .	27
5.3 Алгоритм Vegas . . . . .	28
5.4 Алгоритм Suave . . . . .	29
<b>6 Результаты численного расчета дифференциальных сечений рождения</b>	<b>30</b>
6.1 Фитирование параметров ОПМ . . . . .	30
6.2 Предсказание дифференциальных сечений рождения $J/\psi + \gamma$ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ . . . . .	32
<b>Заключение</b>	<b>38</b>
<b>Список используемых источников</b>	<b>39</b>
<b>Приложения</b>	<b>42</b>

# Введение

Нынешнее положение в физике высоких энергий требует большого числа экспериментальных исследований, которые не только желательны для проверки теорий, но и в общем необходимы для фиксации параметров, которые на современном этапе развития науки невозможно получить из стандартной модели. В частности, предсказание сечений жестких процессов в адронных столкновениях процессов в области пертурбативной КХД (пКХД) требует наличие информации о распределении партонов в сталкивающихся адронах, которая выражается в нПФР.

Отдельным удачным обстоятельством является то, что на масштабе массы  $c$ -кварка константа достаточно мала  $\alpha_s(m_c) \simeq 0.3$ , что позволяет применять пКХД и производить расчеты сечений в рамках теории возмущений, на данный момент времени для определенных процессов достигнута точность следующего за лидирующим приближения (СЛП) [3]. Но несмотря на применимость пКХД, в описании присутствуют существенные трудности связанные с непертурбативностью процесса адронизации пары тяжелых кварка-антикварка в тяжелый кварконий. Непертурбативные процессы адронизации могут быть описаны только в рамках феноменологических моделей. Общий подход НРКХД учитывает, что рождение кваркония может проходить через большой набор октетных и синглетного промежуточных состояний, квантовые числа которых соотносятся с квантовыми числами состояний кваркония [4]. В более простой МЦС предполагается, что пара кварк-антикварк рождается в синглетном по цвету состоянии и квантовыми числами конечного кваркония, МЦС не учитывает релятивистские поправки, которые учитываются в НРКХД, и может применяться в области где поправки малы [5, 6]. Также для описания непертурбативного перехода пары кварк-антикварк в кварконий используется феноменологическая уМИЦ, включающая в себя дополнительный свободный параметр  $\mathcal{F}_\psi$ , параметризующих вероятность рождения чармония [7, 8].

В исследовании рождения  $J/\psi + \gamma$  в адронных столкновениях принципиальным является выбор модели факторизации эффектов мягких процессов. В области больших поперечных импульсов  $m_\psi \ll p_T$  можно пренебречь поперечными импульсами начальных партонов и доказать соответственно, для большого класса процессов, теорему о коллинеарной факторизации, которая является основой КПМ [9]. Но в области малых поперечных импульсов необходимо учитывать ненулевой поперечный импульс начальных партонов непертурбативной природы, поперечный импульс учитывается в подходе TMD-факторизации [10]. Для описания области с поперечным импульсом близким масштабу  $p_T \sim m_\psi$  используют феноменологические расширения моделей

факторизации, например такую, как ОПМ [11].

Исследование ассоциативного рождения  $J/\psi + \gamma$  активно ведется уже почти 35 лет. В 1993-м году Дриз и Ким на основании формализма НРКХД показали, что октетные вклады в рождения  $J/\psi + \gamma$  пренебрежимо малы по сравнению с синглетным вкладом, и также что в лидирующем порядке вклад основным вкладом является вклад глюонного взаимодействия  $g + g$  в начальном состоянии [12]. В 1993-м году Донченски и Ким провели обширное исследование ассоциативного рождения  $J/\psi + \gamma$  при столкновении поляризованных пучков с поляризованной мишенью [13]. Ими было показано, что эксперименты  $J/\psi + \gamma$  может использоваться для извлечения поляризованных партонных функций за счет того, что во взаимодействии поляризованных пучков в поляризованной мишенью лидирующим является вклад  $g + g$  в начальном состоянии, также как и в неполяризованном случае. В 1995-м году Роем и Шридхаром были проведены предсказания сечений на основании фрагментационного механизма  $c \rightarrow J/\psi, \chi_{cj}$  для Tevatron. Ими было показано, что теоретическая ошибка меньше чем при исследовании адронного рождения одиночных  $J/\psi$  [14]. Позже, Мэтью, Шридхар и Базу на основании предсказаний ассоциативного рождения, в рамках формализма НРКХД, для большого адронного коллайдера (БАК) показали, что в любых областях по поперечному импульсу фрагментационный вклад не будет лидирующим [15], подтверждая результат Донческого и Кима, что вклад  $q + \bar{q}$  в начальном состоянии незначителен. Таким образом ожидается, что лидирующий вклад в процессе  $p + p \rightarrow J/\psi + \gamma$  будет рождение при взаимодействии  $g + g$  в начальном состоянии через синглетное состояние  ${}^3S_1^{(1)}$ .

В настоящее время существует большое количество экспериментальных данных при энергиях от  $\sqrt{s} = 19$  ГэВ до предельной энергии большого адронного коллайдера (БАК)  $\sqrt{13}$  ТэВ. Для будущего эксперимента SPD NICA планируется измерение сечения рождения чармониев при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ [16]. Инклюзивное рождение  $J/\psi$ -мезонов хорошо изучено [17], но до сих пор существуют трудности с получением экспериментальных данных ассоциативного рождения  $J/\psi + \gamma$ , которые, как мы надеемся, будут решены в течении будущего эксперимента SPD.

#### **Задачи ВКР:**

- Фиксация феноменологических параметров ОПМ и уМИЦ на основе экспериментальных данных инклюзивного рождения  $J/\psi$ -мезонов, полученных в результате работы экспериментов NA3 [2] и PHENIX [1] при энергиях  $\sqrt{s} = 19.4, 200$  ГэВ.

- С использованием зафиксированных параметров модели, провести теоретическое предсказание дифференциальных сечений по поперечным импульсам, быстротам, инвариантной массе пары  $J/\psi$ -мезона и фотона в ОПМ с использованием моделей адронизации МЦС и уМИЦ.
- Теоретическое предсказание корреляций по разности быстрот, полному поперечному импульсу и разности азимутальных углов пары  $J/\psi$ -мезона и фотона в различных моделях адронизации.
- Оценка теоретической погрешности расчетов дифференциальных сечений и корреляций, связанной с неоднозначностью выбора жесткого масштаба.

#### **Актуальность работы:**

- Фиксация феноменологических параметров ОПМ и уМИЦ играет важную роль в уточнении предсказаний сечений, выполненных на основе ОПМ и уМИЦ.
- Теоретические предсказания важны для будущего определения эффективности различных подходов описания ОПМ-НРКХД и ОПМ-уМИЦ в приложении к процессу ассоциативного рождения  $J/\psi$ -мезонов и фотонов.
- Теоретические предсказания необходимы для оценки возможности экспериментального измерения сечений ассоциативного рождения  $J/\psi + \gamma$  будущем эксперимента SPD.

**Научная новизна** заключается в том, что впервые проводится фиксация параметров ОПМ на основании экспериментальных данных коллабораций NA3 и PHENIX. Также впервые получены уточненные сечения рождения и корреляции для процесса ассоциативного рождения  $J/\psi + \gamma$  при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ.

#### **Апробация работы**

На основе результатов работы была опубликована научная статья [18] в журнале, включенном в перечень ВАК. Также основные результаты докладывались на рабочем совещании коллаборации SPD в 2022-м году, а также на научных конференциях: 25-м международном Балдинском семинаре по проблемам физики высоких энергий «Релятивистская ядерная физика и квантовая хромодинамика», LXXII молодежной научной конференции, посвящённой 80-летию КуАИ-СГАУ-Самарского университета, 115-летию со дня рождения академика С. П. Королёва.

# 1 Квантовая хромодинамика

## 1.1 Введение в КХД

Физика элементарных частиц в середине 20го века претерпела кризис, связанный с обнаружением огромного числа частиц, которые называли адронами. Вигнер и Гейзенберг провели группировку обнаруженных частиц по электрическому заряду и изоспину, позднее Гелл-Манн и Нисидзима добавили группировку по массам и странности. Гелл-Манн сформировал метод группировки, названный восьмеричным путем, в результате чего была высказана гипотеза, что образуются мультиплеты, соответствующие неабелевой группе  $SU(3)$  [19]. Подобное поведение могло быть обусловлено неэлементарностью адронов, о чем предположили Гелл-Манн и Цвейг на основе работ Сакаты [20]. Позднее в 60-х годах экспериментально, в экспериментах высокоэнергетического рассеяния электронов на протонах, были обнаружены внутренние центры рассеяния, что подтвердило теорию составной структуры адронов. На момент 1963-го года была составлена модель включающая в себя 3 элементарных составных частицы адронов, названные соответственно  $s$ ,  $u$ ,  $d$  - кварками (в дальнейшем были обнаружены ещё 3 массивных кварка, которые называли  $c$ ,  $b$ ,  $t$ -кварки). Соответственно структуре группы  $SU(3)$  кварки должны обладать дополнительной степенью свободы этой калибровочной группы, которую назвали цветом. Наличие дополнительной степени свободы обуславливало существование, например, такого адрона, как  $\Delta^{++}(1232)$ , состоящего из 3-х  $u$ -кварков с сонаправленными спинами. Локальная калибровочная инвариантность теории должна естественным образом порождать бозоны, посредством которых происходит взаимодействие. Намбу в 1965-м году высказывает предположение, что взаимодействие происходит через октет векторных бозонов, которые позднее назвали глюонами.

Проведем построение лагранжиана КХД в соответствии с [21]. Лагранжиан КХД строится на основе классической теории Янга-Миллса – калибровочной теории поля, обобщенной на случай произвольной неабелевой локальной симметрии. Допустим вектор  $\psi(x)$  в некотором представлении преобразуется следующим образом  $\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x)$ . Инфинитезимальные преобразования получаются путем разложения в ряд по генераторам группы  $V(x) = 1 + i\alpha^a(x)t^a + O(\alpha^2)$ . Соответственно свойствам алгебры группы Ли выполняется  $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ , где  $f^{abc}$  - структурные константы.

Ковариантную производную определяют как предел разности полей в близких точках, но



для того, чтобы разность полей в разных точках была определена и преобразовывалась однозначным образом добавляют множитель  $U(y, x)$ :

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\psi(x + \varepsilon n, x) - U(x + \varepsilon n, x)\psi(x)]. \quad (1)$$

Дополнительный множитель, зависящий от двух точек пространства должен преобразовываться по закону

$$U(y, x) \rightarrow V(y)U(y, x)V^\dagger(x) \quad (2)$$

чтобы члены разности преобразовывались одинаково, также в одной точке можно положить  $U(x, x) = 1$  и потребовать в общем случае  $U(y, x) = e^{i\phi(y, x)}$ . В этом случае если  $\phi(y, x)$  – гладкая функция, то  $U(x + \varepsilon n, x)$  может быть разложена в ряд, что породит дополнительное векторное поле  $A^\mu$  и по соглашению вынесется константа связи  $g$ :

$$U(x + \varepsilon n, x) = U(x, x) + ig\varepsilon n^\mu A_\mu t^a. \quad (3)$$

Подставляя это в определение (1), получим выражение для ковариантной производной

$$D_\mu = \partial_\mu \psi - igA_\mu^a t^a. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (2) с учетом

$$V(x + \varepsilon n)V^\dagger(x) = 1 + \varepsilon n^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V(x) \right) V^\dagger(x) + O(\varepsilon^2)$$

получим закон преобразования для  $A_\mu^a t^a$  с точностью до 2-го порядка  $O(\varepsilon^2)$ :

$$A_\mu^a t^a \rightarrow V(x) \left( A_\mu^a(x) t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \quad (5)$$

тензор напряженности задается выражением

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a$$

или

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

инфинитезимальное преобразования соответственно  $F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc} \alpha^b F_{\mu\nu}^c$ .

Наиболее общий локально калибровочно-инвариантный, перенормируемый лагранжиан дополнительно инвариантный относительно  $P$  и  $T$  симметрии и называют лагранжианом Янга-Миллса:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{D})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - m\bar{\psi}\psi \quad (6)$$

КХД - калибровочная теория с неабелевой группой симметрии  $SU(3)$ . Калибровочные поля – октет из 8 калибровочных бозонов, то есть существует 8 независимых по цвету состояний (в соответствии с размерность алгебры группы  $SU(N)$   $N^2 - 1$ ), 6 из которых не являются бесцветными. Представляя цвета идентификаторами, например красный – r, синий – b, зеленый – g, что соответствует паллитре цветов (rgb), можно построить независимые цветовые состояния глюонов  $\bar{r}b, \bar{r}g, \bar{b}g, \bar{b}r, \bar{g}r, \bar{g}b, \bar{r}r - \bar{g}g, \bar{r}r + \bar{g}g - 2\bar{c}c$ .

Генераторы группы  $SU(3)$   $t^a$  можно выразить через матрицы Гелл-Манна:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(11)$$

Структурные функции можно выразить из явного вида матриц Гелл-Мана и коммутационного соотношения для генераторов  $[t^a, t^b] = [\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} = if_{abc} t^c$ :

$$f_{123} = 1, f_{147} = 1/2, f_{156} = -1/2, f_{246} = 1/2, f_{257} = 1/2, f_{346} = 1/2, f_{458} = \sqrt{3}/2, f_{678} = \sqrt{3}/2$$

Соответственно лагранжиан теории строится, начиная с лагранжиана Янга-Миллса для группы симметрии  $SU(N_c)$ , где  $N_c = 3$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{\psi}_f (i\hat{D} - m_f) \psi_f, \quad (12)$$

соответственно  $f = u, d, s, c, b, t$  – квантовое число, которое называют ароматом кварка;  $F_{\mu\nu}^a$  – тензор напряженности, содержащий поля глюонов  $A_\mu^a$ ;  $\psi_f$  – поля кварков, причем кварк каждого

аромата образует цветовой триплет  $\psi_f = (\psi_f^1 \psi_f^2 \psi_f^3)^T$ , который преобразуется по фундаментальному представлению  $SU(3)$ ;  $D_\mu^{ab} = \partial_\mu - ig_s(t^c)^{ab}A_\mu^c$ ,  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ , где  $t^a$  - генераторы группы  $SU(3)$ ,  $f^{abc}$  - структурные константы группы. Как видно из вида ковариантной производной, она содержит взаимодействие и также лагранжиан не является квадратичным по полям за счет неабелевости теории  $f^{abc} \neq 0$ .

Соответственно следствием неабелевости является возникновение бозонного самодействия за счет неквадратичности по полям. Или что эквивалентно КХД будет содержать 3-х и 4-х глюонные вершины. Правила Фейнмана для вершин можно получить явно раскрывая нелинейные слагаемые лагранжиана (12):

$$g_s A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi + (-g_s f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu}) + (-\frac{1}{4} g_s^2 (f^{eab} A_\mu^2 A_\nu^b) (f^{ecd} A^{c\mu} A^{d\nu})) \quad (13)$$

Тогда наиболее простая вершина фермион-бозон выделится из 1-го слагаемого (13) (Рис. 1a):

$$ig_s \gamma^\mu t^a$$

Второе слагаемое (13) содержит  $\partial_\mu$ , соответственно учитывая все возможные 3! свертки с внешними частицами с импульсами заданными, как на (Рис. 1b), получим:

$$g_s f^{abc} [g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu]$$

Третье слагаемое (13) не содержит производных, но в свою очередь возможно 4! свертки с внешними полями (Рис. 1c), получим:

$$-ig_s^2 f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) - ig_s^2 f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) - ig_s^2 f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})$$

Фермионный пропагатор получается непосредственно вычислением корреляционной функции (Рис. 1d):

$$\langle \psi_\alpha^a(x) \bar{\psi}_\beta^b \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i\delta^{ab}}{\hat{k} - m} \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)},$$

соответственно пропагатор в импульсном представлении

$$\frac{i\delta^{ab}}{\hat{p} - m + i\varepsilon}.$$

Но при попытке наивно, на основании квантовой электродинамики (КЭД), предположить пропагаторов для калибровочных бозонов нарушается тождество Уорда-Такахаша, следующее из калибровочной инвариантности. Соответственно полные наборы амплитуд с бозон-бозонным

взаимодействием оказываются не калибровочно-инвариантны. Оказывается остаются лишние нефизические степени свободы и необходимо провести фиксацию калибровки. Следуя методу Фадеева-Попова, который предлагает проводить фиксацию калибровки путем добавления в функциональный интеграл  $\int \mathcal{D}A e^{iS[A]}$  по путям функциональной дельта функции [22]

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \left| \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right|, \quad (14)$$

где  $A^\alpha$  – калибровочное поле, полученное с использованием конечного калибровочного преобразования  $(A^\alpha)_\mu^a t^a = e^{i\alpha^a t^a (A_\mu^b t^b + i/g_s \times \partial_\mu)} e^{-i\alpha^c t^c}$ , соответствующая инфинитезимальная форма  $(A^\alpha)_\mu^a = A_\mu^a + 1/g_s \times D_\mu \alpha^a$ , где  $D_\mu = \partial_\mu + g_s f^{abc} A_\mu^b$ . Тожество (14) является континуальным обобщением единичного векторного тождества

$$1 = \left( \prod_i \int da_i \right) \delta^{(n)}(\vec{g}(\vec{a})) \left| \frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right|.$$

Интегрирование зафиксирует наперед заданную функцию  $G(A) = 0$ . Для составления функционального интеграла достаточно рассмотреть только бозонную часть лагранжиана

$$\int \mathcal{D}A e^{(i \int d^4x (-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}))}.$$

Можно заметить, что  $\delta G(A^\alpha)/\delta \alpha$  при инфинитезимальном преобразовании не зависит от  $\alpha$  соответственно интеграл по  $\alpha$  выносится отдельно как множитель  $\int \mathcal{D}\alpha$ .

При явном задании функции, например как для обобщенной калибровки Лоренца  $G(A) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x)$ , фиксирующаяся при калибровке, можно вычислить функциональную производную  $\delta G(A^\alpha)/\delta \alpha = 1/g \times \partial^\mu D_\mu$ . По методу Фадеева-Попова следует, что необходимо представить определитель от функциональной производной, как функциональный интеграл по полям нового вида  $\kappa, \bar{\kappa}$ :

$$\left| \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu \right| = \int \mathcal{D}\kappa \mathcal{D}\bar{\kappa} e^{(i \int d^4x \bar{\kappa} (-\partial^\mu D_\mu) \kappa)}.$$

Соответственно метод Фадеева-Попова приводит к появлению новых антикоммутирующих квантовых полей  $\kappa, \bar{\kappa}$ , которые имеют неправильную связь спина со статистикой, и не могут быть физическими. Эти частицы назвали духи Фадеева-Попова. Возникает добавка полей духов к лагранжиану  $L_g = \partial_\mu \bar{\kappa}^a \partial^\mu \kappa^a + g_s f^{abc} (\partial^\mu \bar{\kappa}^a) A_\mu^b \kappa^c$ , за счет неабелевости теории член взаимодействия духов с калибровочными бозонами теории не исчезает. Также возникает член фиксирующий калибровку  $\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2$ , где при  $\xi = 1$  – калибровка Фейнмана-г'Хофта. При вычислении матричных элементов, диаграммы с духовыми частицами устраняют нефизические сте-

пени свободы, что приводит к тому, что тождество Уорда-Такахаша-Славнова-Тейлора вновь выполняются.

В калибровке Фейнмана пропагатор глюона всё равно будет выглядеть как в КЭД (Рис. 1e)

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

, но в этом случае учет дополнительных диаграмм с духами фадеева-Попова необходим для обеспечения калибровочной инвариантности набора амплитуд.

Явное выражение для пропагатора духов Фадеева-Попова (Рис. 1f):

$$\frac{i\delta^{ab}}{p^2}.$$

Также явное выражение для вершины взаимодействия духов с глюонами (Рис. 1g):

$$-g_s f^{abc} p^\mu.$$

## 1.2 Эволюция константы связи

В КЭД константа связи, которая характеризует силу взаимодействия, проявляется в нулевом порядке теории возмущения, как произведение вершинных факторов  $g$ :  $\alpha = g^2/4\pi$ . При учете эффекта поляризации вакуума, образуется расходящееся выражение, которое регулируется в соответствии с теорией перенормировок, что порождает дополнительный свободный параметр обрезания и уравнение эволюции запишется соответственно:  $\alpha(-q^2) = \alpha(\mu^2)/(1 + \alpha(\mu^2)Q_f^2 \log(\mu^2/ - q^2)/3\pi)$ . При учете нескольких видов фермионов удобнее перейти к величине  $b = -4/3 \times \sum_f Q_f = -32/9 \times n_g$ , где  $n_g$  - число поколений фермионов, которые участвуют в эволюции:

$$\alpha(-q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{(1 + \frac{\alpha(\mu^2)b}{4\pi} \log(\frac{\mu^2}{q^2}))}.$$

Таким образом в КЭД при учете высших порядков возникает зависимость от масштаба регуляризации, по поведению константы связи теории классифицируют. КЭД названа теория с экранировкой заряда, так как чем дальше пробный заряд тем слабее взаимодействие. КХД в свою очередь называют теорией с антиэкранировкой заряда, так как сила взаимодействия растет с расстоянием до пробного цветового заряда.

Одной из самых популярных схем устранения расходимостей в высших порядках теории возмущений является размерная регуляризация, которая заключается в переходе от 4-мерного

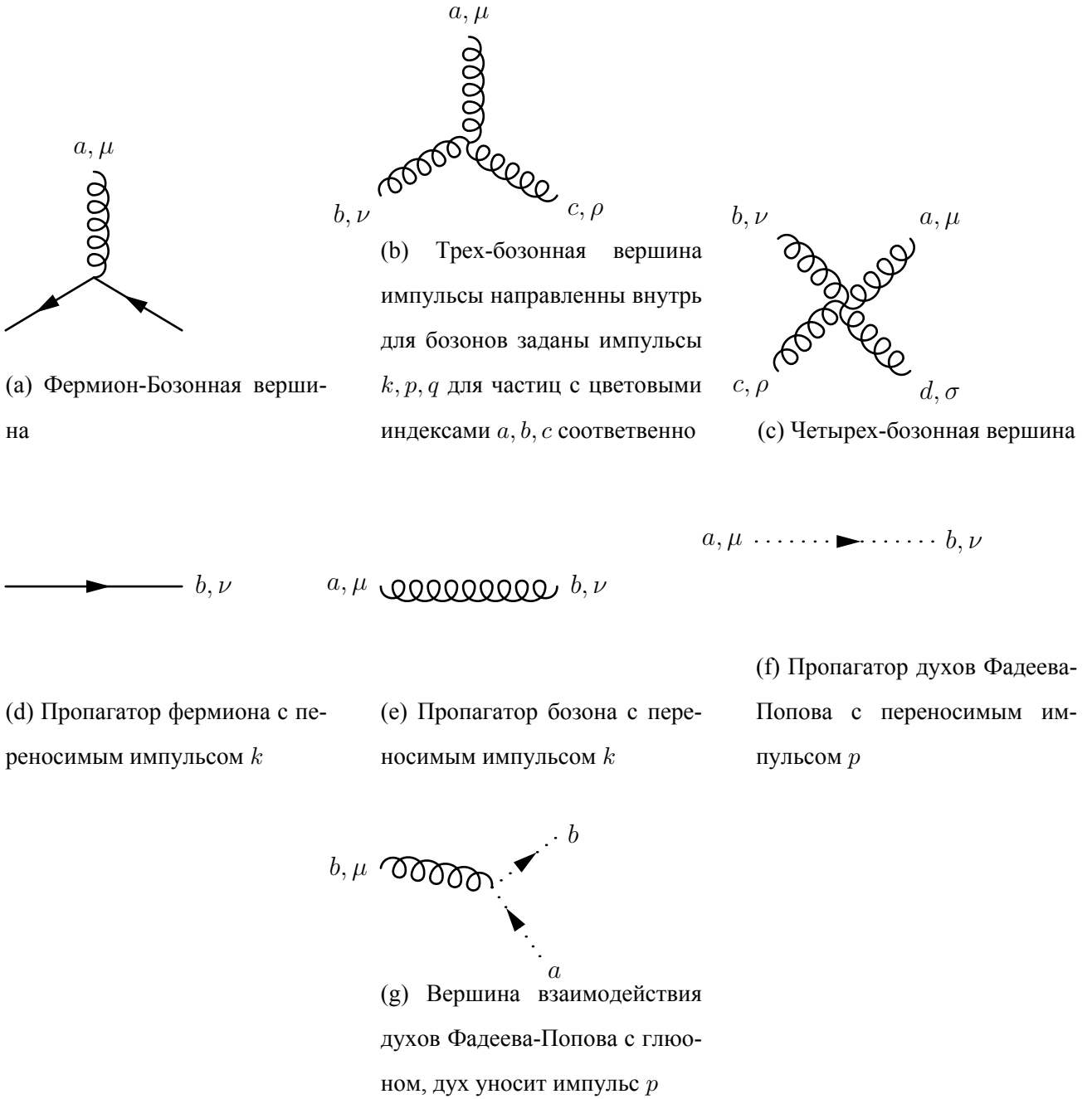


Рис. 1: Графическое представление пропагаторов и вершин, соответствующих правилам Фейнмана КХД для лагранжиана Фадеева-Попова с фермионами.

интегрирования к  $4 - 2\epsilon$ -мерному интегрированию, что позволяет проинтегрировать петлевые интегралы, затем найти их аналитическое дополнение в области  $\epsilon$  в окрестности 0 и выделить расходимость в качестве отдельных членов  $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ . Если в дальнейшем отбросить расходящиеся члены мы придем к схеме минимального вычитания т'Хофта. Сингулярные члены всегда возникают в сумме совместно с  $1/\epsilon - \gamma_e + \log(4\pi)$ , игнорирование все комбинации приведет нас к обобщенной схеме минимального вычитания.

Чтобы исключить выделенные расходимости можно действовать более общо согласно схеме перенормировок калибровочной теории, заменяя лагранжиан теории перенормированным лагранжианом и добавляя лагранжиан контр-членов чтобы скомпенсировать изменения. С учетом требования калибровочной инвариантности вводят преобразования к так называемым голым величинам  $\psi_P, A_P^a, \dots$ :

$$\psi(x) \rightarrow Z_F^{-1/2} \psi_P(x), \quad A_\mu^a \rightarrow Z_B^{-1/2} A_{P\mu(x)}^a, \quad \kappa^a(x) \rightarrow Z_\kappa^{-1/2} \kappa_P^a(x), \quad (15)$$

$$g_s \rightarrow Z_g g_{sP}, \quad m_f \rightarrow Z_{m_f} m_f, \quad \lambda = 1/\alpha \rightarrow Z_\lambda \lambda \quad (16)$$

Лагранжиан, который получается при выполнении замен (15,16) называется перенормированным лагранжианом. Перенормированный лагранжиан представляется в виде суммы  $\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_{ct}$ , где  $\mathcal{L}_u$  содержит так называемые голые величины вместо обычных, но по форме совпадает с обычным лагранжианом КХД,  $\mathcal{L}_{ct}$  – лагранжиан контрчленов, в котором обычные величины заменены на величины вида  $(Z_g - 1)g_s, (Z_m - 1), \dots$ .

Физические наблюдаемые не должны зависеть от свободного параметра, который возникает при применении какой либо схемы регуляризации, что приводит к уравнению ренормгруппы, которое, например для константы связи, запишется как:

$$\mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = g(\mu)\beta(\mu),$$

где  $\beta(\mu)$  - называют  $\beta$ -функцией теории.  $\beta$ -функцию теории можно получить рассматривая независимость от масштаба голой константы связи. Например, если зафиксировать, как используемый метод, упомянутую выше схему минимального вычитания в рамках размерной регуляризации, можно получить:

$$\beta = -Z_g^{-1}(\mu) \frac{d}{d \log(\mu)} (\mu^\epsilon Z_g(\mu)),$$

константы перенормировки вычисляются путем явного вычисления петлевых интегралов, связанных со вкладом диаграмм вершин. В однопетлевом приближении

$$Z_g = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{11}{6} N - \frac{2}{6} n_f \right) N_\epsilon,$$

где с точностью до  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  выполнено  $N_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon) \simeq (4\pi)^{\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2)$ ,  $n_f$  – количество фермионов участвующих в эволюции.

$\beta$  функция может быть разложена в ряд по константе связи и решая уравнение ренорм-группы можно получить уравнение эволюции константы связи в любом порядке теории возмущения. В КХД  $\beta$  функция отрицательно определена и уменьшается с ростом  $g$ , такое поведение называют теорией с антиэкранировкой заряда. В низшем порядке теории возмущения  $\beta = \beta_0 g^2 / (16\pi^2)$ , где  $\beta_0 = (33 - 2n_f)/3$ . Соответствующее уравнение:

$$\mu \frac{g(\mu)}{\mu} = -\beta_0 \frac{g^3(\mu)}{16\pi^2}.$$

Решения данного уравнения может быть выписано в виде [21]:

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{4\pi}{b_s \log\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)},$$

где  $b_s \equiv \beta_0 = 11 - 2n_g/3$  и произведен пререход к  $\Lambda_{QCD} = 0.232$  ГэВ – характерному масштабу процессов КХД, которые не зависят от масс кварков. Это приводит к расходимости выражения при уменьшении переданного импульса при  $\mu = \Lambda_{QCD}$ , что называется полюс Ландау, и асимптотике к 0 при увеличении масштаба  $\mu^2 \rightarrow \infty$  бегущей константы в соответствии с  $\alpha_s \simeq (\log(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2))^{-1}$ .

Поведение при  $\mu^2 \rightarrow \infty$  характеризует эффект асимптотической свободы, при которой взаимодействие исчезает в асимптотике. Экспериментально это подтвердилось в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию электронов на адронах и в 2004-м году за открытие асимптотической свободы Гроссу, Полицеру и Вильчеку была присуждена нобелевская премия [23, 24].

При  $\mu = \Lambda_{QCD}$  уравнение ренормгруппы перестает быть применимым. В области малых, но  $\mu > \Lambda_{QCD}$  пКХД может быть применима только если константа связи достаточно мала. Как упоминалось во введении, константа связи на масштабе массы  $c$ -кварка  $\alpha_s(m_c) \simeq 0.3$ , соответственно соотношение  $\alpha_s \ll 1$  выполняется с некоторой точностью, и пКХД ограниченно применима.

Дополнительно к свойству асимптотической свободы в пределе больших масштабов в КХД наблюдается свойство конфаймента в области малых масштабов. Свойство конфаймента заключается в невылетании цветных частиц и невозможности их непосредственного наблюдения. При попытке разделить цветные частицы, например пару кварк-антикварк, будет порождаться группа бесцветных мезонов или адронов. Согласно гипотезе конфаймента величина сильного



взаимодействия должна возрастать линейно с увеличением расстояния. Невозможно выделить из протона отдельные партоны, соответственно невозможно непосредственно изучить структуру протона. Это обстоятельство привносит существенные трудности, возникает необходимость в формировании дополнительных моделей за пределами пертурбативной КХД, которые адекватно бы описали структуру адронов.

К сожалению гипотеза конфаймента до сих пор не доказана теоретически для КХД. Единственно аналитическое доказательство явления конфаймента было выполнено Зайбергом и Виттенем в теории  $\mathcal{N} = 2$  в пределе сильной связи, которая является суперсимметричным обобщением КЭД.

## 2 Факторизация сечений

### 2.1 Коллинеарная партонная модель

Из-за существенных трудностей применения пертурбативной КХД в области масштабов близких к характерному масштабу КХД  $\Lambda_{QCD}$  наиболее эффективно описываются процессы в пертурбативной области теории с  $\Lambda_{QCD}^2 \ll \mu^2$ , которые носят название жесткие процессы. Согласно свойству асимптотической свободы при большом масштабе процесса партоны в протоне перестают взаимодействовать. В этом пределе  $\Lambda_{QCD} \ll \mu \ll \sqrt{s}$  возникает возможность представить сечение рождения в виде свертки сечения партонного подпроцесса, которое вычисляется пертурбативным образом, и коллинеарных партонных функций распределения (кПФР), которые описывают нептурбативные эффекты. Подразумевается, что до столкновения адроны находятся в квантовых состояниях, которые независят от другого адрона, этим обосновывается универсальность нПФР. Теорема о коллинеарной факторизации, или КПМ, которая выросла из партонной модели предложенной Р. Фейнманом в 1969 году [25], была доказана для большого числа процессов, таких как глубоконеупругое рассеяние, процессов типа Дрелл-Яна и др. Факторизация КПМ запишется соответственно [9]:

$$d\sigma(A + B \rightarrow I) = \int \cdots \int dx_1 dx_2 \sum_{i,j} f_{A \rightarrow i}(x_1, \mu^2) f_{B \rightarrow j}(x_2, \mu^2) d\hat{\sigma}(i + j \rightarrow I), \quad (17)$$

где  $I$  - некое конечное квантовое состояние,  $A$  и  $B$  - начальные адроны процесса,  $i$  и  $j$  - пробегают все типы партонов, содержащихся в адроне, то есть глюоны и кварки всех ароматов,  $f(x, \mu^2)$  - соответственно нПФР, которые зависят от  $x$ , физический смысл которой трактуется, как до-

ля импульса унесенная партоном, и от масштаба жесткого процесса  $\mu^2$ . Партоны в начальном состоянии  $i, j$  находятся на массовой поверхности  $q_1^2 = q_2^2 = 0$  и их поперечным импульсом пренебрегли  $q_1^3 = q_1^3 = q_2^3 = q_2^3 = 0$ .

нПФР  $f_{A \rightarrow i}(x, \mu^2)$  можно физически трактовать, как вероятность, что партон типа  $i$ , содержащийся в адроне типа  $A$  будет участвовать в процессе масштаб которого  $\mu$ . Применительно к глубоко неупругому рассеянию масштаб процесса выбирают виртуальность  $Q^2 = -q^2$  пробного фотона, который взаимодействует с протоном, и тогда это трактуется как масштаб физического рассмотрения протона. Так как согласно партонной модели протон является связанным состоянием валентных кварков ( $uud$ ) и произвольным числом пар кварк-антикварк морских кварков то должно быть выполнено условие нормировки нПФР:

$$\int_0^1 dx [f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)] = 2, \quad \int_0^1 dx [f_d(x) - f_{\bar{d}}] = 1, \quad \int_0^1 dx (f_s(x) - f_{\bar{s}}) = 0 \quad (18)$$

В так как суммарный импульс унесенный партонами должен быть равен импульсу адрона:

$$\int_0^1 x [f_g(x) + \sum_{q=s, \bar{s}, d, \bar{d}, u, \bar{u}} f_q(x)] = 1 \quad (19)$$

При рассмотрении процессов глубоконеупругого рассеяния Бьеркен в 1969 году показал, что сечение процесса, при исключении кинематической зависимости от электродинамического вклада, зависит только доли переданного импульса партону от протона, данный эффект был назвал скейлингом Бьеркена. Эксперименты, проводимые в 70-х годах 20 века, выявили, что скейлинг Бьеркена нарушается логарифмически из-за эволюции нПФР по масштабу  $\mu^2$ . Уравнения эволюции по масштабу сначала были строены Докшицером, Грибовым и Липатовым для КЭД, позднее обобщены для КХД Альтерели и Паризи, соответственно уравнения эволюции назвали уравнения Докшицера-Грибова-Липатова-Альтерели-Паризи (ДГЛАП).

Основой уравнения ДГЛАП является учёт испускания строгоупорядоченных по поперечному импульсу мягких партонов

$$p_{1T} \gg p_{2T} \gg p_{3T} \gg \dots,$$

что в результате приводит к пересуммированию, так называемых, больших логарифмов, усиленных ближе к непертурбативной области,  $\alpha_s^n(\mu^2) \log^n(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)$ . Уравнения ДГЛАП имеют

ВИД:

$$\frac{\partial f_{\bar{q}}(x, \mu)}{\partial \log(\mu)} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} (P_{q \rightarrow q}(z) f_{\bar{q}}(\frac{x}{z}, \mu) + P_{g \rightarrow q}(z) f_g(\frac{x}{z}, \mu)), \quad (20)$$

$$\frac{\partial f_q(x, \mu)}{\partial \log(\mu)} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} (P_{q \rightarrow q}(z) f_q(\frac{x}{z}, \mu) + P_{g \rightarrow q}(z) f_g(\frac{x}{z}, \mu)), \quad (21)$$

$$\frac{\partial f_g(x, \mu)}{\partial \log(\mu)} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} (P_{q \rightarrow g}(z) \sum_{i=s,u,d} [f_{q_i}(\frac{x}{z}, \mu) + f_{\bar{q}_i}(\frac{x}{z}, \mu)] + P_{g \rightarrow g}(z) f_g(\frac{x}{z}, \mu)), \quad (22)$$

где  $P_{x \rightarrow y}$  - функции расщепления, которые задают плотность вероятности рождения партона  $y$  из партона  $x$  и в лидирующем рорядке теории возмущений имеют вид:

$$P_{q \rightarrow q}(x) = \frac{4}{3} \left( \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right) \quad (23)$$

$$P_{g \rightarrow q}(x) = \frac{4}{3} \left( \frac{1+(1-x)^2}{x} \right) \quad (24)$$

$$P_{g \rightarrow g}(x) = \frac{1}{2} (x^2 + (1-x)^2) \quad (25)$$

$$P_{q \rightarrow g}(x) = 6 \left( \frac{1-x}{x} + \frac{x}{(1-x)_+} + x(1-x) + \left( \frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(x) \right), \quad (26)$$

где  $1/(1-x)_+$  - обобщенная функция со свойством  $\int_0^1 dx f(x)/(1-x)_+ = \int_0^1 dx (f(x) - f(1))/(1-x)$ .

В отличие от КЭД, в которой можно поставить явные начальные условия для решения уравнений ДГЛ, частицы КХД не наблюдаемы и соответственно начальные условия явно поставить невозможно. Поэтому нПФР получают из анализа экспериментальных данных на некотором масштабе  $\mu_0$  и по уравнениям ДГЛАП расширяют на всю область определения по масштабу.

## 2.2 Обобщенная партонная модель

Как феноменологическое обобщение КПМ вводится ОПМ, которая призвана учесть ненулевой поперечный импульс непертурбативной природы, но в то же время начальные партоны остаются на массовой поверхности  $q_1^\mu = x_1 P_1^\mu + \tilde{x}_1 P_2^\mu + q_{1T}^\mu$ ,  $q_2^\mu = x_2 P_2^\mu + \tilde{x}_2 P_1^\mu + q_{2T}^\mu$ ,  $\tilde{x}_{1,2}$  фиксируются условиями  $q_1^2 = q_2^2 = 0$ . Возникающее перемешивание импульсов отчасти нарушает идею о независимости квантовых состояний пучков до столкновения, что вносит дополнительные трудности, как в теоретической трактовки, так и в виде искомым выражений. Факторизация

сечения в ОПМ запишется [11]:

$$d\sigma(A+B \rightarrow I) = \int \cdots \int dx_1 d^2 q_{1T} dx_2 d^2 q_{2T} \sum_{i,j} F_{A \rightarrow i}(x_1, \vec{q}_{1T}, \mu^2) F_{B \rightarrow j}(x_2, \vec{q}_{2T}, \mu^2) d\hat{\sigma}(i+j \rightarrow I),$$

где  $F_{A \rightarrow i}(x, \vec{q}_T, \mu^2)$  – нПФР, зависящие от поперечного импульса. В ОПМ задается

$$F_{A \rightarrow i}(x, \vec{q}_T, \mu^2) = G(\vec{q}_T) f(x_1, \mu^2),$$

функция  $G(\vec{q}_T)$  может быть выбрана из различных соображений, но наиболее простой выбор это нормированный Гауссиан, который перераспределяет плотность вероятности появления партона с определенными  $x, \vec{q}_T$ :

$$G(\vec{q}_T) = e^{-\vec{q}_T^2 / \langle q_T^2 \rangle} / (\pi \langle q_T^2 \rangle) \quad (27)$$

$$\int d^2 q_T G(\vec{q}_T) = 1. \quad (28)$$

Необходимо учесть, что  $G(\vec{q}_T)$  выбирается неодинаковой для кварков и глюонов, так что логично переобозначить  $G(\vec{q}_T) \equiv G_{g,q}(\vec{q}_T)$  и  $\langle q_T^2 \rangle \equiv \langle q_T^2 \rangle_{g,q}$  для кварков и глюонов соответственно.

## 3 Модели адронизации

### 3.1 Улучшенная модель испарения цвета

Одной из популярных моделей адронизации пары  $c\bar{c}$  в тяжелый чармоний является уМИЦ [7, 8, 26]. В уМИЦ накладывается дополнительное ограничение на инвариантную массу пары  $c\bar{c}$  из соображения, что во-первых, для того, чтобы был рожден чармоний, необходимо чтобы масса пары, которая составит этот чармоний, была больше или равна массы состояния кваркония. Сверху масса пары ограничивается порогом рождения самого легкого мезона с открытым очарованием, то есть  $m_\psi \ll M_{c\bar{c}} \equiv M \ll 2m_D$ . ограничение накладывается дополнительном интегралом по инвариантной массе:

$$\sigma(p + p \rightarrow \psi + X) = \mathcal{F}_\psi \int_{m_\psi^2}^{4m_D^2} \frac{d\sigma(p + p \rightarrow \psi + X)}{dM^2} \Big|_{p \rightarrow p_\psi \frac{M}{m_\psi}} dM^2,$$

где  $\mathcal{F}_\psi$  – феноменологический параметр параметризующий вероятность рождения чармония из пары  $c\bar{c}$ ,  $m_\psi$  - масса состояния чармония, дополнительный сдвиг  $p^\mu = p_\psi^\mu M / m_\psi$  появляется из-за отличия массы состояния и массы связанной пары, так выполняется нормальные тождества

$p^2 = M^2, p_\psi^2 = m_\psi^2$ . Масса  $m_D = 1.869$  ГэВ, масса  $J/\psi$  мезона  $m_\psi \equiv m_{J/\psi} = 3.096$  ГэВ. В качестве массы  $c$ -кварка принимается среднее значение без учета неопределенности  $m_c = 1.3$  ГэВ.

## 3.2 Нерелятивистская квантовая хромодинамика

Описание рождения тяжелых кваркониев должно быть выполнено на основании отличного от пКХД формализма так как это суть непертурбативный процесс [4]. Рассматривая тяжелые кварконии необходимо указать что, так как масса тяжелых кварков много больше масс легких кварков ( $m_c \simeq 1.3$  ГэВ,  $m_{s,u,d} \in \{1.7 - 101\}$  МэВ), связанные состояния тяжелых кварков могут быть хорошо описаны в нерелятивистском приближении, в котором применяется потенциал характеризующий эффекты КХД  $V(r) = -4\alpha_s/(3r) + a^2r$ , где линейно-расходящийся член характеризует конфаймент, а член  $\sim r^{-1}$  характеризует глюонный обмен.

Для описания тяжелых кваркониев была сформирована эффективная теория поля, лагранжиан которой представляется в виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_h + \delta\mathcal{L},$$

где  $\mathcal{L}_l$  - лагранжиан легких кварков,  $\mathcal{L}_h$  - лагранжиан тяжелых кварков, представляющий Шредингеровский нерелятивистский лагранжиан,  $\delta\mathcal{L}$  - часть лагранжиана включающая высшие степени взаимодействия.

НРКХД факторизует сечение процесса рождения тяжелого кваркония на жесткую часть, что соответствует рождению пары кварк-антикварк с квантовыми числами тяжелого кваркония  $[n]$ , и мягкую часть, что учитывает непертурбативные эффекты превращения пары в тяжелый кварконий:

$$d\sigma(p + p \rightarrow H + X) = \sum_n d\sigma(p + p \rightarrow q\bar{q}[n]X) \frac{\langle \mathcal{O}^H[n] \rangle}{N_{col} N_{pol}},$$

где  $q$  - соответствующие кварконию тяжелые кварки,  $N_{col} = 6$  для синглетных состояний и  $N_{col} = 8$  для октетных состояний,  $N_{pol} = 2J + 1$ , а  $\langle \mathcal{O}^H[\backslash] \rangle$  - непертурбативные матричные элементы (НЭМ) фиксирующиеся на основе экспериментальных данных. Синглетные НЭМ могут быть вычислены в рамках потенциальных моделей связанных состояний тяжелых кваркониев и выражены через квадрат модуля волновой функции в 0:

$$\langle \mathcal{O}^H[{}^{2s+1}S_J^{(1)}] \rangle = 2N(2J + 1)|\Psi(0)|^2 \quad (29)$$

$$\langle \mathcal{O}^H[{}^{2s+1}P_J^{(1)}] \rangle = 2N(2J + 1)|\Psi'(0)|^2 \quad (30)$$

Амплитуда, которая соответствует рождению пары кварк-антикварк с соответствующими определенному состоянию тяжелого кваркония может быть получено путем явного проектирования состояния пары, путем замены комбинации спиноров  $U\bar{V}$  на проектор:

$$\Pi_0 = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} \left( \frac{\hat{p}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \gamma^5 \left( \frac{\hat{p}}{2} + \hat{q} + m_c \right) \quad (31)$$

$$\Pi_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} \left( \frac{\hat{p}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \gamma^\mu \left( \frac{\hat{p}}{2} + \hat{q} + m_c \right) \quad (32)$$

Спиновые проекторы получены в системе покоя пары как классический проектор для массивных частиц и сдвинуты бустом в систему покоя пучков. НРКХД рассматривает тяжелые кварки нерелятивистскими, соотвенно их относительная скорость мала, но можно перейти к абсолютному пределу и положить из относительный импульс в тяжелом кварконии  $q \rightarrow 0$ . Цветовые проекторы должны сформировать синглетное или октетное по цвету состояния, соотвенно их вид  $C(1) = \delta^{ab}/\sqrt{N}$ ,  $C(8) = \sqrt{2}t^a$ . Соответственно амплитуда рождения различных состояний пары  $c\bar{c}$  запишутся:

$$M(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^1S_0^{(1,8)}]) = Tr[C^{(1,8)}\Pi_0 A(a + b \rightarrow c\bar{c})] \Big|_{q \rightarrow 0}$$

$$M(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1,8)}]) = Tr[C^{(1,8)}\Pi_1^\mu A(a + b \rightarrow c\bar{c})\varepsilon_\mu(J_z, p)] \Big|_{q \rightarrow 0}$$

$$M(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_J^{(1,8)}]) = \frac{d}{dq_\nu} Tr[C^{(1,8)}\Pi_1^\mu A(a + b \rightarrow c\bar{c})\varepsilon_{\mu\nu}^{(J)}(J_z, p)] \Big|_{q \rightarrow 0}$$

$$M(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_1^{(1,8)}]) = \frac{d}{dq_\nu} Tr[C^{(1,8)}\Pi_0 A(a + b \rightarrow c\bar{c})\varepsilon_\nu(J_z, p)] \Big|_{q \rightarrow 0}$$

Суммирование по поляризациями кваркония для векторов  $\varepsilon_\mu(J_z, p)$  аналогична суммированию по поляризациям массивных частиц:

$$\sum_{J_z} \varepsilon_\mu(J_z, p)\varepsilon_\nu^*(J_z, p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \equiv P_{\mu\nu}(p) \quad (33)$$

Суммирование в случае состояний  $\chi_{cJ}$  с полными моментами  $J = 0, 1, 2$  проводится в соответствии с правилами:

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{(0)}(0, p)\varepsilon_{\mu'\nu'}^{(0)*}(0, p) = \frac{1}{3}P_{\mu\nu}(p)P_{\mu'\nu'}(p)$$

$$\sum_{J_z} \varepsilon_{\mu\nu}^{(1)}(J_z, p)\varepsilon_{\mu'\nu'}^{(1)*}(J_z, p) = \frac{1}{2}(P_{\mu\mu'}(p)P_{\nu\nu'}(p) - P_{\mu\nu'}(p)P_{\mu'\nu}(p))$$

$$\sum_{J_z} \varepsilon_{\mu\nu}^{(3)}(J_z, p)\varepsilon_{\mu'\nu'}^{(3)*}(J_z, p) = \frac{1}{2}(P_{\mu\mu'}(p)P_{\nu\nu'}(p) + P_{\mu\nu'}(p)P_{\mu'\nu}(p) - P_{\mu\nu}(p)P_{\mu'\nu'}(p))$$

При неучете релятивистских поправок остается только лидирующий по  $alpha_s$  член, соответствующие синглетному состоянию, это и называется МЦС:

$$d\sigma(p + p \rightarrow H + X) = d\sigma(p + p \rightarrow q\bar{q}[H^{(1)}]X) \frac{\langle \mathcal{O}^H[n] \rangle}{6N_{pol}}.$$

При относительно низких энергиях релятивистскими поправками можно пренебречь, и становятся существенными только при переходе к энергиям порядка 1 ТэВ, где недостаточно синглетного вклада для описания сечения.

Как было показано [27], что экспериментальные данные одиночного рождения  $J/\psi$  коллаборации PHENIX [1] при энергии  $\sqrt{s} = 200$  ГэВ в области  $p_T \leq 1$  ГэВ хорошо описываются, и соответственно вклад рождения через октетные состояния пренебрежимо мал. Как будет показано, при фитировании экспериментальных данных  $p_{TJ/\psi}$  спектров рождения одиночных  $J/\psi$  в МЦС и ОПМ, варьируя только феноменологические параметры ОПМ, можно получить хорошее согласие с экспериментом, но при этом необходимо учитывать не только вклад прямого рождения, но и каскадного рождения  $J/\psi$ -мезонов через распад высших состояний  $\chi_{c0}, \psi(2S)$ :

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g \quad (34)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_1^{(1)}] + g \quad (35)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(1)}] \quad (36)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(1)}], \quad (37)$$

квадраты амплитуд были получены в работе [28] и представлены в приложении Б.

Также было показано, что для удовлетворительного описания данных сечений рождения  $J/\psi$  при энергии эксперимента коллаборации NA3  $\sqrt{s} = 19.4$  ГэВ [2] необходимо учитывать дополнительные октетные вклады

$$q + \bar{q} \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}] \quad (38)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}] \quad (39)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(8)}] \quad (40)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(8)}]. \quad (41)$$

В лидирующем приближении ассоциативное рождение  $J/\psi + \gamma$  включает в себя только процессы, которые идут через синглетные по цвету состояния, однако вклад каскадного рождения

оказываются пренебрежимо мал [12]:

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + \gamma \quad (42)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_1^{(1)}] + \gamma \quad (43)$$

Все используемые матричные элементы представленных процессов приведены в приложении Б, за исключением матричного элемента  $\overline{|M|^2}(g + g \rightarrow c + \bar{c} + \gamma)$ , который не может быть приведен из-за своей громоздкости.

## 4 Сечения рождения

### 4.1 Сечение $2 \rightarrow n$ ОПМ

Зададим импульсы для частиц жесткого подпроцесса соответственно схеме процесса  $q_1 + q_2 \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n$ , массы конечных частиц  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Сечение партонного подпроцесса может быть записано в соответствии с теорией рассеяния как:

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - \sum_i p_i) \frac{\overline{|M|^2}}{J} \prod_i \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2p_i^0}.$$

4-мерную дельта-функцию можно свести к 1-мерной путем снятия 3-х интегралов по импульсу конечной частиц, из интегрирования по фазовому пространству состояний конечной частицы. При этом используется тождество  $d^3 p / 2p^0 = \delta(p^2 - m^2) d^4 p$ .

$$d\hat{\sigma} = (2\pi) \delta \left( (q_1 + q_2 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i)^2 - m_n^2 \right) \frac{\overline{|M|^2}}{J} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2p_i^0}.$$

Ограничение ОПМ на квадрат начальных импульсов  $q_1^2 = q_2^2 = 0$  приводит к существенному усложнению выражений, которые становятся квадратичными по начальным оперечным импульсам:

$$q_1^\mu = x_1 P_1^\mu + \tilde{x}_1 P_2^\mu + q_{1T}^\mu \quad (44)$$

$$q_2^\mu = x_2 P_2^\mu + \tilde{x}_2 P_1^\mu + q_{2T}^\mu \quad (45)$$

, где  $\tilde{x}_1 = \kappa_1/x_1 = q_{1T}^2/(x_1 s)$  И  $\tilde{x}_2 = \kappa_2/x_2 = q_{2T}^2/(x_2 s)$ ,  $q_{1,2T}^\mu = (0, \vec{q}_{1,2T}, 0)^\mu$



Имея явный вид 4-импульсов можно решить уравнение в одномерной дельта-функции наиболее просто относительно  $x_2$  как квадратное уравнение, преобразуя  $K^\mu = \sum_{i=1}^{n-1} p_i^\mu$ , запишем решение через 4-мерные скалярные произведения:

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (46)$$

$$a = 2 \cdot (-(K, P_2) + (P_2, q_1)) \quad (47)$$

$$b = -m_n^2 + K^2 - 2(K, q_1) - 2(K, q_{2T}) + 2\kappa_2(P_1, P_2) + 2(q_1, q_{2T}) + q_{2T}^2 \quad (48)$$

$$c = 2\kappa_2(-(K, P_1) + (P_1, q_1)) \quad (49)$$

Дополнительно снимая 1 интеграл по азимутальному углу путем фиксации произвольного порога системы вокруг оси столкновения протонных пучков, выразим дифференциальное сечение рождения соответственно:

$$d\sigma = \int dx_1 d^2 q_{1T} \int q_{2T} dq_{2T} \sum_{a,b} F_a(x_1, \vec{q}_{1T}, \mu^2) F_b(x_2, \vec{q}_{2T}, \mu^2) (2\pi)^{4-3n} \frac{|M|^2}{J} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{2p_i^0},$$

где  $J = 2\hat{s}$ . Матричный элемент  $|M|^2$  вычисленный в пертурбативной КХД выражен через  $2 + 3n$  лоренцевских инвариантов  $|M|^2$ , в частности для процесса  $2 \rightarrow 2$  инвариантами можно выбрать - инварианты Мандельштама  $\hat{s} = (q_1 + q_2)^2$ ,  $\hat{t} = (q_1 - p_1)^2$ ,  $\hat{u} = (q_1 - p_2)^2$ .

## 4.2 Сечение $J/\psi + \gamma$ в ОПМ-уМИЦ

Для теоретического вычисления сечения рождения при использовании модели уМИЦ существует прием, который упрощает интегрирование, заключающийся в переходе к интегрированию по углам  $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$  в системе Колинза-Соппера (СКС), связанной с системой покоя пары  $c\bar{c}$ . Связь импульсов  $c$  и  $\bar{c}$  кварков соответственно с углами в СКС запишется:

$$p_1^\mu = \frac{p^\mu}{2} + k^\mu, \quad p_2^\mu = \frac{p^\mu}{2} - k^\mu,$$

где

$$k^\mu = \frac{\sqrt{M^2 - 4m_c^2}}{2} (X^\mu \sin(\theta) \cos(\phi) + Y^\mu \sin(\theta) \sin(\phi) + Z^\mu \cos(\theta)), \quad (50)$$

$$X^\mu = \frac{1}{M} (p_T \cosh(y), m_T, 0, p_T \sinh(y))^\mu, \quad (51)$$

$$Y^\mu = \text{sgn}(y)(0, 0, 1, 0)^\mu, \quad (52)$$

$$Z^\mu = \text{sgn}(y)(\sinh(y), 0, 0, \cosh(y))^\mu, \quad (53)$$

где  $M$ ,  $p_T$ ,  $m_T = \sqrt{p_T^2 + M^2}$  - инвариантная масса, поперечный импульс и поперечная масса пары  $c\bar{c}$ ,  $m_c$  - масса  $c$ -кварка.

При переходе к интегрированию по углам в системе центра масс сечение процесса с учетом особенности уМИЦ запишется:

$$d\sigma = \int \frac{p_T \overline{|M|^2}}{(2\pi)^4 32 \hat{s} D} \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{M^2}} d^2 q_{1T} dy_{J/\psi} dp_{TJ/\psi} dM^2 d\Omega \times \frac{p_{3T} dp_{3T} d\phi_3 dy_3}{2},$$

где  $y_{J/\psi}$ ,  $p_{TJ/\psi}$  - быстрота и поперечный импульс  $J/\psi$ -мезона соответственно,  $p_{3T}$ ,  $\phi_3$ ,  $y_3$  - поперечный импульс, азимутальный угол и быстрота фотона соответственно,  $\overline{|M|^2}(g + g \rightarrow c + \bar{c} + \gamma)$  - матричный элемент выраженный через лоренцевские инварианты

$$\hat{s} = (q_1 + q_2)^2, \quad \hat{t} = (q_2 - p_3)^2, \quad \hat{u} = (q_1 - p_3)^2, \quad (54)$$

$$\hat{w}_1 = (q_1 - p_1)^2, \quad \hat{w}_2 = (q_2 - p_2)^2, \quad M^2 = (p_1 + p_2)^2. \quad (55)$$

Дифференциальное сечение может быть легко сведено к сечению рождения  $J/\psi$  в процессе  $p+p \rightarrow J/\psi + X$  в уМИЦ в лидирующем порядке по  $\alpha_s$ , для этого достаточно убрать из формулы интегрирование по фазовому объему 3-й частицы  $\frac{p_{3T} dp_{3T} d\phi_3 dy_3}{2} = \frac{d^3 p_3}{2p_3^0}$ , заменить матричный элемент подпроцесса  $\overline{|M|^2}(g + g \rightarrow c + \bar{c} + \gamma)$  на матричный элемент  $\overline{|M|^2}(h + \bar{h} \rightarrow c + \bar{c})$ ,  $h = g, q, \bar{q}$  и соответственно количество независимых инвариантов необходимых для фиксации кинематики сократится с 5 до 2-х. Хочется напомнить, что в данной работе сечение процесса  $p+p \rightarrow J/\psi + X$  в лидирующем приближении требуется, чтобы на основе существующих экспериментальных данных зафиксировать феноменологические параметры ОПМ и уМИЦ  $\langle q_T^2 \rangle_{g,q}$ , характерные для рождения  $J/\psi$ -мезонов при различных энергиях.

Матричные элементы  $\overline{|M|^2}(h + \bar{h} \rightarrow c + \bar{c})$ ,  $h + \bar{h} \equiv q + \bar{q}, g + g$  запишутся крайне просто [29]:

$$\overline{|M|^2}(q + \bar{q} \rightarrow c + \bar{c}) = 16g_s^4 \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2m_c^2(2\hat{s} - m_c^2)}{\hat{s}^2} \quad (56)$$

$$\overline{|M|^2}(g + g \rightarrow c + \bar{c}) = 16g_s^2 \left( \frac{m_c^2 - t}{m_c^2 - u} + \frac{m_c^2 - u}{m_c^2 - t} + 4 \left( \frac{m_c^2}{m_c^2 - t} + \frac{m_c^2}{m_c^2 - u} \right) - N \right) \times F \quad (57)$$

$$N = 4 \left( \frac{m_c^2}{m_c^2 - t} + \frac{m_c^2}{m_c^2 - u} \right)^2 \quad (58)$$

$$F = \left( \frac{8}{3} - 6 \left( \frac{(m_c^2 - t)(m_c^2 - u)}{s^2} \right) \right) \quad (59)$$

. Матричный элемент  $\overline{|M|^2}(g + g \rightarrow c + \bar{c} + \gamma)$  был вычислен с использованием программных пакетов FeynArts, FeynCalc в системе Wolfram Mathematica и в качестве характерного масштаба была выбрана поперечная масса  $J/\psi$ -мезона  $\mu = m_{TJ/\psi} = \sqrt{p_{TJ/\psi}^2 + m_{J/\psi}^2}$ .

## 5 Метод Монте-Карло

### 5.1 Наивное интегрирование

При  $n$  частиц в конечном состоянии, размерность фазового пространства конечного состояния  $3 \times n$ . Накладываемое ограничение законом сохранения энергии выражается 4-мерной дельта-функцией. Факторизационные свертки также увеличивают кратность интегрирования, коллинеарная факторизация на 2,  $k_T$  и TMD факторизации на 6. Кратность можно уменьшить на 1 путем фиксации произвольного поворота системы вокруг оси пучков в системе центра масс. В итоге кратность интегрирования  $3 \times n - 3$  для КПМ и  $3 \times n + 1$  для  $k_T$  и TMD  $3 \times n + 1$ . Таким образом, при попытке получить сечения рождения необходимо возникает большое количество кратных интегралов, которые исключают возможность аналитического вычисления. Численное интегрирование методом квадратур будет также не эффективно хотябы при 2-х частицах в конечном состоянии. Решить данное затруднение был призван метод Монте-Карло [30] в применении к интегрированию. Основная идея метода заключается в том, что исследуемый интеграл можно ассоциировать с интегралом вычисления математического ожидания некоторой многомерной случайно величины  $\vec{\xi}$ :

$$\mathcal{M}f(u) = \int \cdots \int f(\vec{\xi}) \phi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}. \quad (60)$$

В случае равномерно распределенной случайной  $\phi(\vec{\xi}) = \text{const}$  величины можно явно записать:

$$\int \cdots \int f(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \frac{\mathcal{M}f(u)}{\phi(\vec{\xi})} \simeq I_N = \frac{1}{\phi(\vec{\xi})N} \sum_{i=1}^N f(\vec{\xi}_i), \quad (61)$$

при этом закон больших чисел будет гарантировать сходимость суммы. Средне-квадратическое отклонение при частичных сумм  $I_N$  при этом будет уменьшаться как  $\sim 1/\sqrt{N}$ .

### 5.2 Выборка по значимости

Одним из методов уменьшения ошибки при Монте-Карло интегрировании является выборка по значимости. В отличие от равномерной генерации точек, в методы выборки по значимости точки генерируются по некой, наперед заданной плотности распределения. При вычислении исследуемого интеграла всегда можно перейти к другой случайно величине и аппроксимировать

интеграл конечной суммой:

$$I = \int \cdots \int f(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \int \cdots \int J(\vec{y}) f(\vec{\xi}(\vec{y})) d\vec{y} \simeq I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J(\vec{y}_i) f(\vec{\xi}(\vec{y}_i)). \quad (62)$$

Дисперсии точной выборки и частичной выборки могут быть определены соответственно:

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{N} \left( \int \cdots \int J(\vec{y}) f(\vec{\xi}(\vec{y})) d\vec{y} - I^2 \right); \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J^2(\vec{y}_i) f^2(\vec{\xi}(\vec{y}_i)) - I_N^2 \right). \quad (63)$$

### 5.3 Алгоритм Vegas

Алгоритм Vegas многомерного интегрирования методом Монте-Карло был предложен Питером Лепажем в 1978 году и с тех пор активно используется в физике частиц, в различных Монте-Карло генераторах и численных вычислениях сечений процессов [31]. Основой алгоритма является реализация выборки по важности путем построения многомерной сетки шириной ячеек которой характеризует плотность вероятности случайной величины. Основной идеей алгоритма является переход к случайной величине распределенной равномерно в  $n$ -мерном единичном кубе  $0 < \vec{y} < 1$ . В пространстве новой переменной границы сетки будут также равномерно распределены в пределах многомерного единичного куба. Обратное преобразование границ сетки  $x_i^\mu$  случайной величины может быть записано соответственно:

$$\xi^\mu = \xi_{i^\mu}^\mu + \Delta \xi_{i^\mu}^\mu \delta^\mu \quad (64)$$

$$i^\mu = \lfloor y^\mu N^\mu \rfloor \quad (65)$$

$$\delta^\mu = y^\mu N^\mu - i^\mu \quad (66)$$

при этом верхний и нижний индексы  $x_i^\mu$  соответственно измерение в многомерном пространстве и номер грани сетки при разделении отрезка на  $N^\mu + 1$  частей в соответственном измерении. При этом  $N^\mu$  может быть различна для каждого измерения многомерного пространства. Якобиан обратного преобразования  $J(\vec{y}) = \prod_{\mu} N^\mu \Delta \xi_{i^\mu}^\mu$ .

Итеративный характер алгоритма заключается в том, что в начале работы границы сетки распределяются равномерно и после каждой итерации вычисления сдвигаются так, чтобы плотность вероятности была приближена к подынтегральному выражения. Для этого в каждой области сетки вычисляется величина

$$d_i^\mu = \frac{1}{n_i^\mu} \sum_{\xi_i^\mu \in \Delta \xi_i^\mu} J^2(\vec{y}) f^2(\vec{\xi}(\vec{y})), \quad (67)$$

где  $n_i$  - количество точек попавших в интервал. Оптимальной конфигурацией сетки является такая, при которой все  $\vec{d}_i$  равны между собой. Для преодоления проблемы слишком сильного изменения сетки при первых итерациях при интегрировании ступенчатых функций вводится процедура сглаживания и нормирования величин  $d_i^\mu$ , основанная на гладкой интерполяции:

$$d_i^\mu \rightarrow \frac{1}{\sum_i d_i^\mu} \begin{cases} i = 0, & (7d_0^\mu + d_1^\mu)/8 \\ i \neq 0, N^\mu - 1, & (d_{i-1}^\mu + 6d_i^\mu + d_{i+1}^\mu)/8 \\ i = N^\mu - 1, & (d_{N^\mu-2}^\mu + 7d_{N^\mu-1}^\mu)/8 \end{cases} \quad (68)$$

Также для преодоления проблемы слишком сильной реакции на большие значения подынтегральной функции вводится процедура уменьшения с параметром  $\alpha$  который позволяет контролировать степень изменения сетки при каждой итерации  $d_i^\mu: d_i^\mu \rightarrow ((d_i^\mu - 1)/\log(d_i^\mu))^\alpha$ .

## 5.4 Алгоритм Suave

Suave - это алгоритм представленный Томасом Ханом [32], который использует выборку по важности алгоритма Vegas и метод итерационного подразделения пространства интегрирования. Данный метод носит название рекурсивная стратифицированная выборка. Основная идея которого заключается в разбиении области с наибольшей ошибкой на несколько подобластей, при этом подразделение происходит по изменению пространства, которое приведет к наиболее эффективной редукции ошибки. Стратифицированная выборка Suave является модифицированной выборкой алгоритма Miser, но на каждом шаге Suave проводит оценку эффективности подразделения по каждому измерению. Подобное поведение позволяет добиться большей эффективности алгоритма при тех же затратах оперативной памяти (ОП). Алгоритм Suave реализован в программном пакете для многомерного интегрирования Cuba, представленном Томасом Ханом.

Существенным отличием Vegas и Suave алгоритмов является то, что для хранения структуры подразделения алгоритма Suave требуется минимум  $\sim 8(n_d + 1)n_s$  байт, здесь  $n_d$  - размерность интеграла,  $n_s$  - количество подразделений. Подобное требование памяти приводит к тому, что объем занятой ОП оперативной памяти возрастает линейно с ростом количества сечений подобластей. Алгоритм Vegas в свою очередь требует константное количество ОП  $\sim 8n_d n_c$ , так как в результате итераций границы сетки Vegas только сдвигаются, здесь  $n_c$  - количество областей на которые подразделили каждое измерение пространства интегрирования.

В данной для теоретического расчета сечений рождения используется работе алгоритм Suave из программного пакета Cuba [32].

## 6 Результаты численного расчета дифференциальных сечений рождения

### 6.1 Фитирование параметров ОПМ

Как было показано в выпускной квалификационной работе обучающегося уровня бакалавриата малая вариация феноменологических параметров ОПМ  $\langle q_T^2 \rangle_{g,q} (1 \pm 0.2)$  сильнее всего влияет на сечения корреляций, но также они влияют на дифференциальное сечение по поперечному импульсу  $J/\psi$  мезона и ширина коридора сечения в  $p_{TJ/\psi} = 0$  достигает  $0.6\sigma$  среднее отклонение в долях  $\langle \Delta\sigma/\sigma \rangle = 0.37$ , а выборочная дисперсия  $S = 0.15$ , что сравнимо с теоретической неопределенностью, связанной с неопределенностью жесткого масштаба, для которой среднее отклонение в долях  $\langle \Delta\sigma/\sigma \rangle = 0.54$  и выборочная дисперсия  $S = 0.22$  для сечения ОПМ-МЦС и  $\langle \Delta\sigma/\sigma \rangle = 0.81$  и  $S = 0.52$  для сечения ОПМ-уМИЦ при энергии  $\sqrt{s} = 200$  ГэВ в центральной области по быстройте  $|y| < 0.35$ . Таким образом строго фиксируя параметры ОПМ мы избавляемся от большой доли теоретической неопределенности расчета.

Были проведены численные расчеты сечений рождения  $J/\psi$ -мезонов при энергии  $\sqrt{s} = 200$  ГэВ в кинематической области эксперимента PHENIX  $|y| < 0.35$  при  $0 < p_{TJ/\psi} < 3$  ГэВ [1], и также при энергии  $\sqrt{s} = 19.4$  ГэВ в кинематической области эксперимента NA3  $y > 0$  при  $0 < p_{TJ/\psi} < 4$  ГэВ [2] в ОПМ-МЦС и ОПМ-уМИЦ. Сечения представлены на (Рис. 2) По результатам фита были зафиксированы феноменологические параметры ОПМ и уМИЦ и представлены в (таблице 1).

Эксперимент	Энергия, $\sqrt{s}$ , ГэВ	$\mathcal{F}^\psi$	$\langle q_T^2 \rangle_g$ , ГэВ <sup>2</sup>	$\langle q_T^2 \rangle_q$ , ГэВ <sup>2</sup>
PHENIX [1]	200	0.05	$2.09^{+0.13}_{-0.07}$	$0.45^{+0.48}_{-0.18}$
NA3 [2]	19.4	0.33	$0.96^{0.05}_{-0.04}$	$0.29^{+0.04}_{-0.03}$

Таблица 1: Результаты фитирования параметров ОПМ и МИЦ.

При ограничении области описания  $0 < p_{TJ/\psi} < 3$  ГэВ на (Рис. 2) видно, что экспери-

ментальные данные описываются достаточно хорошо. В результате фитирования было также получено, что при уменьшении энергии столкновения вклад кварк-антикварковой аннигиляции становится существенным в области малых  $p_{TJ/\psi}$ .

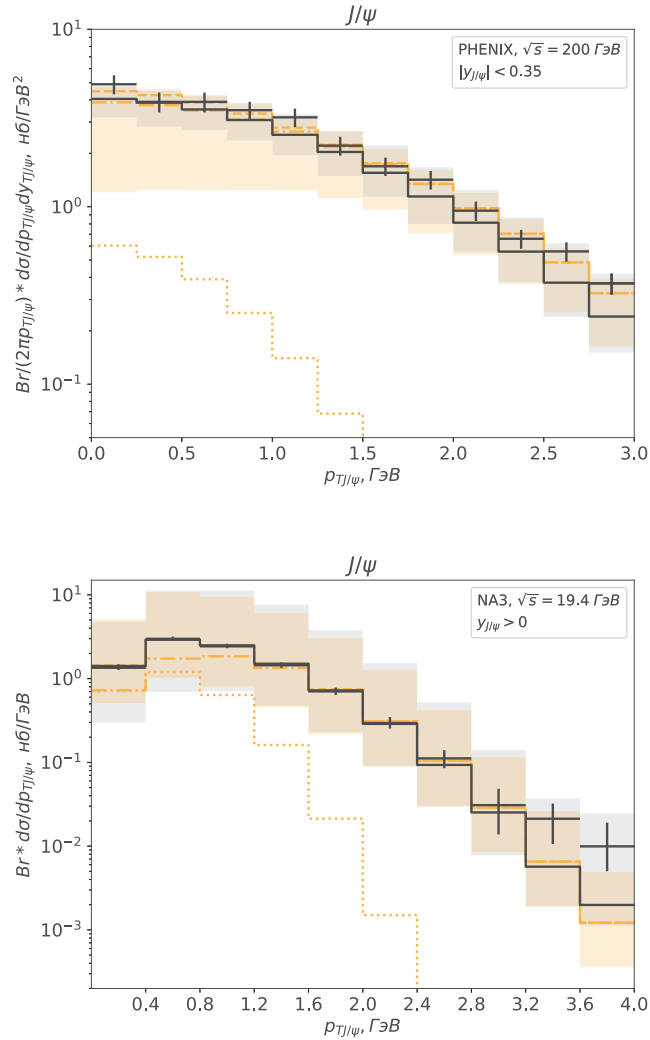


Рис. 2: Верхний график: Дифференциальное сечение рождения  $J/\psi$ -мезонов как функция поперечного импульса при энергии  $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ ,  $|y| < 0.35$ . Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, штрих-пунктирная – в ОПМ-уМИЦ, пунктирная – вклад кварк-антикварковой аннигиляции ОПМ-уМИЦ.

Нижний график: Дифференциальное сечение рождения  $J/\psi$ -мезонов как функция поперечного импульса при энергии  $\sqrt{s} = 19.4 \text{ GeV}$ ,  $y > 0$ . Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, штрих-пунктирная – в ОПМ-уМИЦ, пунктирная – вклад кварк-антикварковой аннигиляции ОПМ-уМИЦ

## 6.2 Предсказание дифференциальных сечений рождения $J/\psi + \gamma$ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ

Полученные при энергии NA3 значения феноменологических параметров  $\langle q_T^2 \rangle_{g,q}$  используются для предсказаний уточненных сечений рождения и различных спектров при энергии коллайдера NICA  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ и конфигурации эксперимента SPD  $|y| < 3$  при ограничении на поперечный импульс фотона  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. На всех рассматриваемых графиках, здесь и далее, представлены коридоры неопределенности по жесткому масштабу  $\mu = y * m_{TJ/\psi}$ , где  $y$  варьируется в пределах (0.5, 2.0).

Предсказания дифференциальных сечения ассоциативного рождения  $J/\psi + \gamma$  представлены соответственно: на (Рис. 3 верхний график) предсказание дифференциального сечения в зависимости от суммарного поперечного импульса пары  $J/\psi + \gamma$ , на (Рис. 3 нижний график) предсказание дифференциального сечения в зависимости от инвариантной массы пары, на (Рис. 4 верхний график) в зависимости от разности быстрот  $J/\psi$ -мезона и фотона, на (Рис. 4 нижний график) в зависимости от разности азимутальных углов, на (Рис. 5), (Рис. 6) соответственно дифференциальные сечения в зависимости от поперечных импульсов  $p_{TJ/\psi}$  и  $p_{T\gamma}$  и быстрот  $y_{J/\psi}$ ,  $y_\gamma$ .

Был произведен подробный анализ вклада в теоретическую неопределенность сечения вклада вариации жесткого масштаба и вариации параметров ОПМ. Результаты анализа представлены в (таблице 2). Показано, что наибольшее влияние вариации параметров ОПМ приходится на дифференциальные сечения по поперечному импульсу  $J/\psi$ , по суммарному поперечному импульсу пары  $J/\psi + \gamma$ , по разности азимутальных углов  $J/\psi + \gamma$ , что можно трактовать так, фитирование экспериментальных данных по вышеполученным сечениям позволит уменьшить погрешность фитирования параметров.



Дифференциальное сечение	МЦС вариация $\mu$	уМИЦ вариация $\mu$	вариация $\langle p_T^2 \rangle_{q,g}$
$d\sigma/dp_{TJ/\psi}$	$1.33 \pm 0.59$	$2.18 \pm 1.76$	$0.21 \pm 0.12$
$d\sigma/dp_{T\gamma}$	$1.55 \pm 1.00$	$1.64 \pm 0.92$	$0.13 \pm 0.05$
$d\sigma/dy_{J/\psi}$	$1.21 \pm 0.73$	$1.53 \pm 0.99$	$0.07 \pm 0.02$
$d\sigma/dy_{\gamma}$	$1.26 \pm 0.73$	$1.31 \pm 0.75$	$0.06 \pm 0.02$
$d\sigma/dM$	$1.45 \pm 0.93$	$1.48 \pm 0.81$	$0.03 \pm 0.05$
$d\sigma/d \vec{p}_{TJ/\psi} + \vec{p}_{T\gamma} $	$1.21 \pm 0.65$	$1.71 \pm 1.04$	$0.23 \pm 0.18$
$d\sigma/d\Delta y$	$1.38 \pm 0.86$	$1.38 \pm 0.92$	$0.06 \pm 0.03$
$d\sigma/d\Delta\phi$	$1.29 \pm 0.73$	$1.63 \pm 1.18$	$0.22 \pm 0.16$

Таблица 2: Результаты анализа вкладов в теоретическую неопределенность. в каждой ячейке приведено среднее отклонение при вариации в долях  $\pm$  стандартное отклонение отклонения вариации в долях при полном сечении  $\sigma(p + p \rightarrow J/\psi + \gamma) = 1.44$  нб

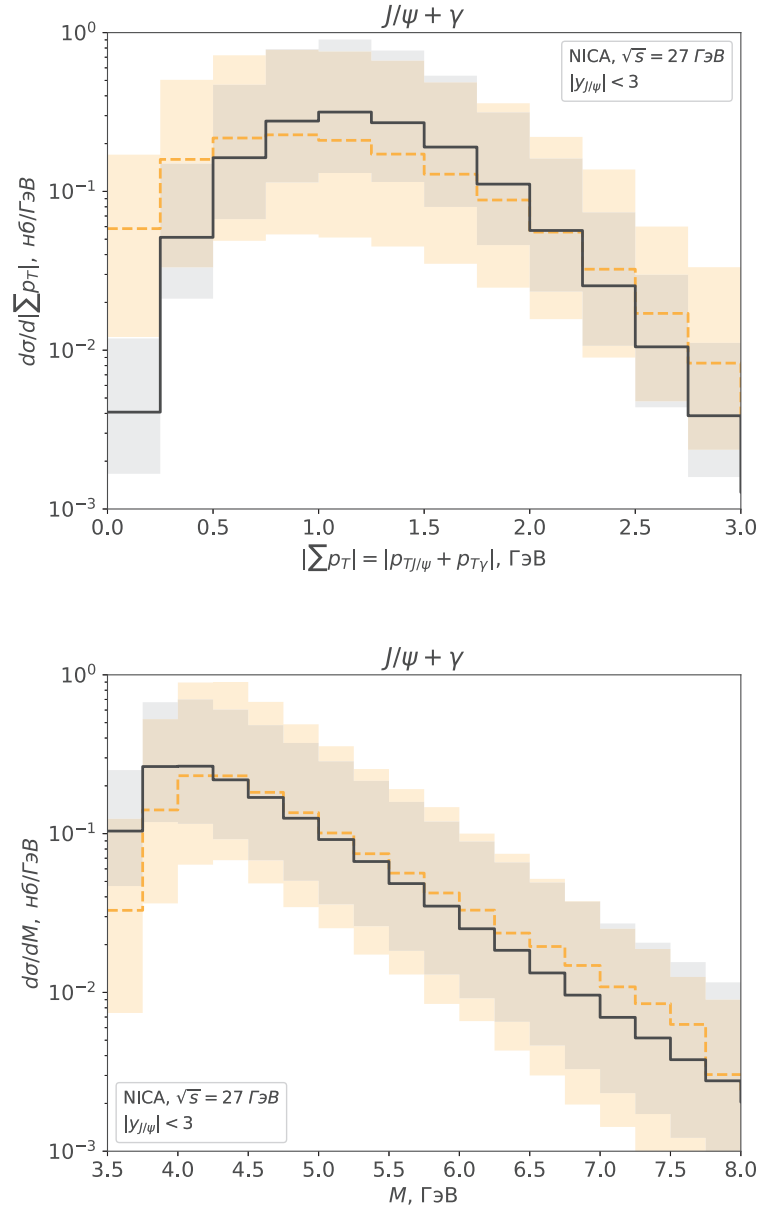


Рис. 3: Верхний график: Дифференциальное сечение рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функция их суммарного поперечного импульса, при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_\psi| < 3$ ,  $|y_\gamma| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

Нижний график: Дифференциальное сечение рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функция инвариантной массы пары  $M_{\psi\gamma}$ , при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_\psi| < 3$ ,  $|y_\gamma| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

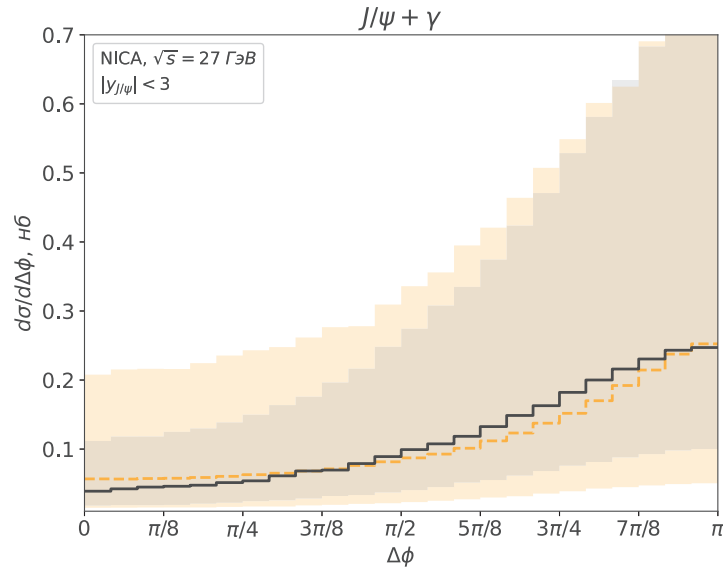
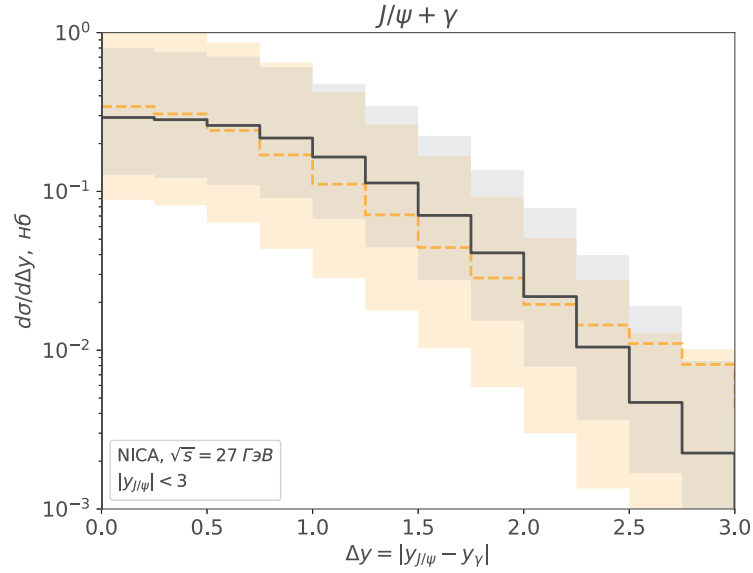


Рис. 4: Верхний график: Дифференциальное сечение рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функция разности быстрот  $\Delta y_{\psi\gamma}$ , при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_{\psi}| < 3$ ,  $|y_{\gamma}| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

Нижний график: Дифференциальное сечение рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функция разности азимутальных углов  $\Delta\phi_{\psi\gamma}$ , при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_{\psi}| < 3$ ,  $|y_{\gamma}| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

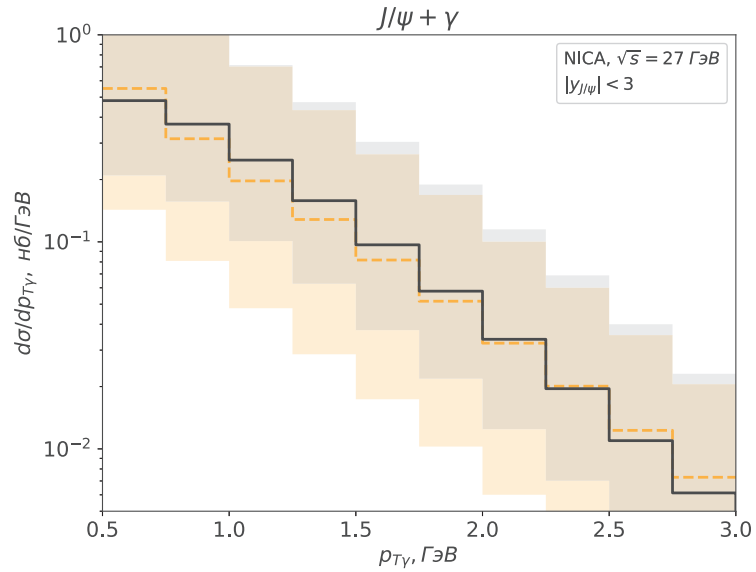
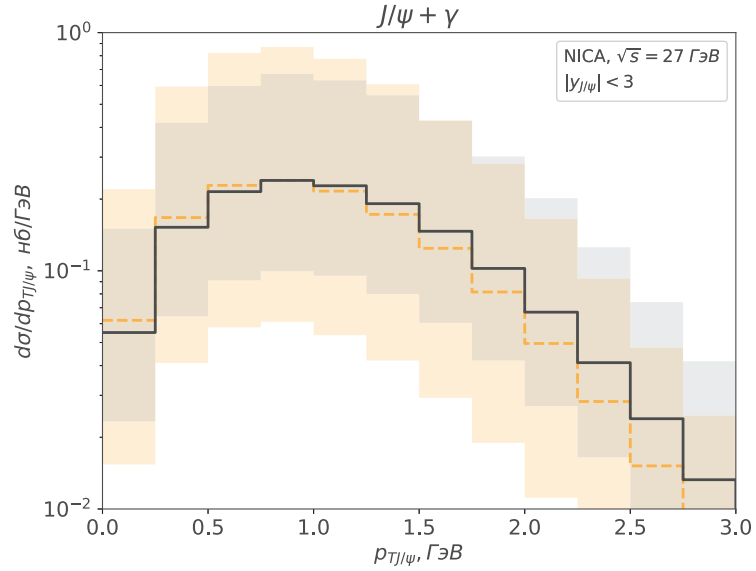


Рис. 5: Верхний график: Дифференциальные сечения рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функции поперечных импульсов  $p_{T\psi}$ , при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_\psi| < 3$ ,  $|y_\gamma| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

Нижний график: Дифференциальные сечения рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функции поперечных импульсов  $p_{T\gamma}$ , при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_\psi| < 3$ ,  $|y_\gamma| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

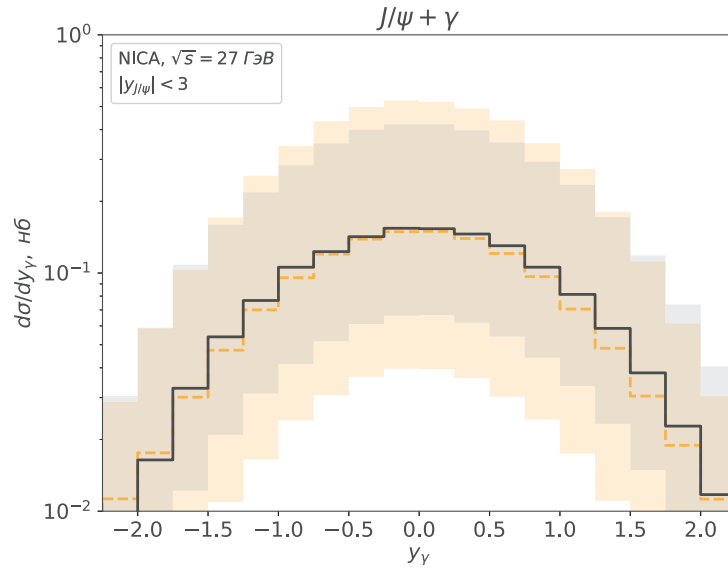
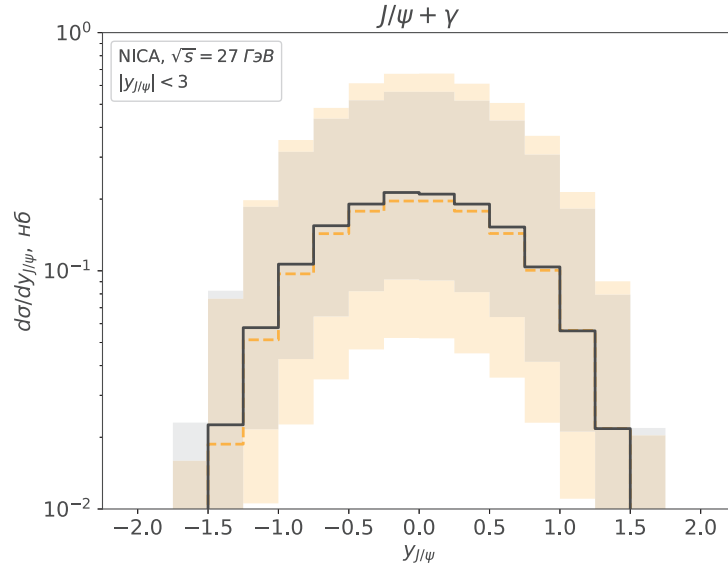


Рис. 6: Верхний график: Дифференциальные сечения рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функции быстроты  $y_\psi$ , при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_\psi| < 3$ ,  $|y_\gamma| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

Нижний график: Дифференциальные сечения рождения  $J/\psi + \gamma$  пары, как функции быстроты  $y_\gamma$ , при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ,  $|y_\psi| < 3$ ,  $|y_\gamma| < 3$ ,  $p_{T\gamma} > 0.5$  ГэВ. Сплошная кривая – в ОПМ-МЦС, пунктирная – в ОПМ-уМИЦ.

## Заклучение

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы было проведено исследование ассоциативного рождения  $J/\psi$ -мезонов и фотонов в протонных столкновениях в лидирующем порядке по  $\alpha_s$  в ОПМ с применением двух моделей адронизации МЦС и уМИЦ. Был аналитически вычислен матричный элемент  $g + g \rightarrow J/\psi + \gamma$ . Были получены формулы расчета дифференциальных сечений рождения одиночных  $J/\psi$  и ассоциативного рождения  $J/\psi + \gamma$  с учетом особенностей ОПМ и уМИЦ. На основе экспериментальных данных рождения одиночных  $J/\psi$ , коллабораций PHENIX [1] и NA3 [2], было проведено фитирование параметров ОПМ и уМИЦ. Было подтверждены выводы предыдущих исследователей, что при  $\sqrt{s} = 200$  ГэВ в центральной области по быстроте  $|y| < 0.35$  октетные вклады не требуются для описания экспериментальных данных.

Были сделаны предсказания дифференциальных сечений и корреляций для будущего эксперимента SPD, в соответствующей кинематической области, при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ. Для всех рассматриваемых дифференциальных сечений получен коридор теоретической неопределенности связанный с неопределенностью жесткого масштаба, путем вариации  $\mu$  на фактор 2. Путем полного статистического анализа полученной теоретической неопределенности показано, что наименьшая неопределенность будет проявляться в дифференциальных сечениях по физическим величинам  $\gamma$  ассоциированного с  $J/\psi$ -мезоном.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Ground and excited state charmonium production in p plus p collisions at root s= 200 GeV [Text] / Adare Andrew, Dion Alan, Ogilvie Craig, Hill John, Kempel Todd, Lajoie John, Lebedev Alexandre, Pei H, Rosati Marzia, Semenov Alexey, et al. — 2012.
- [2] Experimental  $J/\psi$  hadronic production from 150 to 280 GeV/c [Text] / Collaboration NA 3, Badier J, Boucrot J, Bourotte J, Burgun G, Callot O, Charpentier Ph, Crozon M, Decamp D, Delpierre P, et al. // Zeitschrift für Physik C Particles and Fields. — 1983. — Vol. 20. — P. 101–116.
- [3] Butenschoen Mathias, Kniehl Bernd A. Next-to-leading order tests of non-relativistic-QCD factorization with  $J/\psi$  yield and polarization [Text] // Modern Physics Letters A. — 2013. — Vol. 28, no. 09. — P. 1350027.
- [4] Bodwin Geoffrey T, Braaten Eric, Lepage G Peter. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium [Text] // Physical Review D. — 1995. — Vol. 51, no. 3. — P. 1125.
- [5] Baier Rudolf, Rückl R. Hadronic collisions: a quarkonium factory [Text] // Zeitschrift für Physik C Particles and Fields. — 1983. — Vol. 19. — P. 251–266.
- [6] Berger Edmond L, Jones DL1981PhRvD. Inelastic photoproduction of  $J/\psi$  and  $\Upsilon$  by gluons [Text] // Physical Review D. — 1981. — Vol. 23, no. 7. — P. 1521.
- [7] Fritzsche Harald. Producing heavy quark flavors in hadronic collisions—A test of quantum chromodynamics [Text] // Physics Letters B. — 1977. — Vol. 67, no. 2. — P. 217–221.
- [8] Halzen Francis. CVC for gluons and hadroproduction of quark flavours [Text] // Physics Letters B. — 1977. — Vol. 69, no. 1. — P. 105–108.
- [9] Collins John. Foundations of perturbative QCD [Text]. — Cambridge University Press, 2011.
- [10] Collins John C, Soper Davison E, Sterman George. Factorization of hard processes in QCD [Text] // Perturbative Qcd. — World Scientific, 1989. — P. 1–91.

- [11] Wong Cheuk-Yin, Wang Hui. Effects of parton intrinsic transverse momentum on photon production in hard-scattering processes [Text] // *Physical Review C*. — 1998. — Vol. 58, no. 1. — P. 376.
- [12] Drees Manuel, Kim CS. Associate  $J/\psi + \gamma$  production: a clean probe of gluon densities [Text] // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*. — 1992. — Vol. 53, no. 4. — P. 673–678.
- [13] Doncheski MA, Kim CS. Associated  $J/\psi + \gamma$  production as a probe of the polarized gluon distribution [Text] // *Physical Review D*. — 1994. — Vol. 49, no. 9. — P. 4463.
- [14] Roy DP, Sridhar K.  $J/\psi + \gamma$  production at Tevatron energy // *Physics Letters B*. — 1995. — Vol. 341, no. 3-4. — P. 413–418.
- [15] Mathews Prakash, Sridhar K, Basu Rahul.  $J/\psi + \gamma$  production at the CERN LHC // *Physical Review D*. — 1999. — Vol. 60, no. 1. — P. 014009.
- [16] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD [Text] / Arbuзов A, Bacchetta A, Butenschoen M, Celiberto FG, D'alesio U, Deka M, Denisenko I, Echevarria MG, Efremov A, Ivanov N Ya, et al. // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. — 2021. — Vol. 119. — P. 103858.
- [17] Vogelsang W, Whalley MR. A compilation of data on single and double prompt photon production in hadron-hadron interactions [Text] // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 1997. — Vol. 23, no. 7A. — P. A1.
- [18] Alimov Lev E, Saleev Vladimir A. Associative production of  $J/\psi$ -mesons and direct photons at the energy of the NICA collider [Text] // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. — 2023. — Vol. 29, no. 2. — P. 48–61.
- [19] Gell-Mann Murray. *The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry*. — 1961. — 3.
- [20] Gell-Mann Murray. A Schematic Model of Baryons and Mesons // *Phys. Lett.* — 1964. — Vol. 8. — P. 214–215.
- [21] Peskin Michael E. *An introduction to quantum field theory* [Text]. — CRC press, 2018.



- [22] Фаддеев Людвиг Дмитриевич. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов [Текст] // Теоретическая и математическая физика. — 1969. — Vol. 1, no. 1. — P. 3–18.
- [23] Gross David J, Wilczek Frank. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories [Text] // Physical Review Letters. — 1973. — Vol. 30, no. 26. — P. 1343.
- [24] Politzer H David. Reliable perturbative results for strong interactions? [Text] // Physical Review Letters. — 1973. — Vol. 30, no. 26. — P. 1346.
- [25] Feynman Richard P. Very high-energy collisions of hadrons // Physical Review Letters. — 1969. — Vol. 23, no. 24. — P. 1415.
- [26] Ma Yan-Qing, Vogt Ramona. Quarkonium production in an improved color evaporation model [Text] // Physical Review D. — 2016. — Vol. 94, no. 11. — P. 114029.
- [27] Karpishkov AV, Saleev VA, Nefedov MA. Estimates for the single-spin asymmetries in the  $p \uparrow p \rightarrow J/\psi X$  process at PHENIX RHIC and SPD NICA [Text] // Physical Review D. — 2021. — Vol. 104, no. 1. — P. 016008.
- [28] Cho Peter, Leibovich Adam K. Color-octet quarkonia production [Text] // Physical Review D. — 1996. — Vol. 53, no. 1. — P. 150.
- [29] CORE COmpendium of RELations: version 2.1 [Text] : Rep. / SCAN-9606079 ; executor: Borodulin VI, Slabospitsky SR, Rogalyov RN : 1995.
- [30] Соболев Илья Меерович. Метод Монте-Карло [Текст]. — 1968.
- [31] Lepage G Peter. Adaptive multidimensional integration: VEGAS enhanced [Text] // Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 439. — P. 110386.
- [32] Hahn Thomas. Cuba—a library for multidimensional numerical integration [Text] // Computer Physics Communications. — 2005. — Vol. 168, no. 2. — P. 78–95.

## Приложение А

Здесь  $M$  - масса состояния чармония,  $s, t, u$  - инварианты Мандельстама.

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g)|^2} = \frac{320\pi^3\alpha_s^3 M}{81(M^2 - t)^2(M^2 - u)^2(t + u)^2} \times [M^4(t^2 + tu + u^2) - M^2(t + u)(2t^2 + tu + 2u^2) + (t^2 + tu + u^2)^2] \quad (69)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_1^{(1)}] + g)|^2} = \frac{128\pi^3\alpha_s^3(-M^2(t + u) + t^2 + tu + u^2)^2}{3M^3(M^2 - t)^4(M^2 - u)^4(t + u)^4} \times (M^{10}(t^2 + u^2) - 2M^8(t + u)(3t^2 - tu + 3u^2) + M^6(13t^4 + 20t^3u + 10t^2u^2 + 20tu^3 + 13u^4) - 4M^4(t + u)(3t^4 + 5t^3u + t^2u^2 + 5tu^3 + 3u^4) + M^2(4t^6 + 18t^5u + 25t^4u^2 + 20t^3u^3 + 25t^2u^4 + 18tu^5 + 4u^6) - 2tu(t + u)(t^2 + tu + u^2)^2), \quad (70)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(1)}])|^2} = \frac{8\pi^2\alpha_s^2}{3M^3}, \quad (71)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(1)}])|^2} = \frac{32\pi^2\alpha_s^2}{45M^3}, \quad (72)$$

$$\overline{|M(q + \bar{q} \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)})|^2} = \frac{16\pi^2\alpha_s^2}{27M}, \quad (73)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)})|^2} = \frac{5\pi^2\alpha_s^2}{12M}, \quad (74)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(8)})|^2} = \frac{5\pi^2\alpha_s^2}{M^3}, \quad (75)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(8)})|^2} = \frac{4\pi^2\alpha_s^2}{3M^3} \quad (76)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + \gamma)|^2} = \frac{1024\pi^3\alpha\alpha_s^2}{243M(M^2 - t)^2(M^2 - u)^2(t + u)^2} \times (s^3(t^2 + tu + u^2) + s^2(t + u)^3 + stu(t^2 + 3tu + u^2) + t^2u^2(t + u)) \quad (77)$$

## Приложение Б

Программа расчета сечения рождения  $J/\psi + X$  в ОПМ-уМИЦ для эксперимента NA3

```

1 #include "cuba.h"
2 #include "LHAPDF/LHAPDF.h"
3 LHAPDF::PDF* pdftable;
4 double ss = 19.4;
5 double q_2Tsr = 1.;
6 double mu_mult = 1.;
7 double mc = 1.3;
8 double mass = 3.096;
9 double mD = 1.86962;
10 double Fc = 1.;
11 int binsNum = 10;
12 double binStart = 0.0;
13 double binDelta = 0.4;
14 double BIN0;
15 double BIN1;
16 std::string pdftablename = "MSTW2008lo68cl";
17 double cy0 = 0.;
18 double cy1 = 100.;
19 int NDIM = 5;
20 int VERBOSE = 0;
21 double EPSREL = 0.01;
22 int MAXEVAL=2000000000;
23 int NNEW = 800000;
24 int NMIN = 260000;
25 double EPSABS = 1.e-19;
26 int NCOMP = 1;
27 int NVEC= 1;
28 int SEED=23;
29 int MINEVAL=0;
30 using namespace std;
31 static int Integrand(const int *ndim, const cubareal xx[],
32     const int *ncomp, cubareal ff[], void *userdata) {
33     double phi = 2.*M_PI*xx[0];
34     double x2 = xx[1];
35     double x1 = xx[2];
36     double q1t = xx[3]/(1 - xx[3]);
37     double kt = BIN0 + (BIN1-BIN0)*xx[4];
38     double jacob = (2.*M_PI)/pow(1-xx[3],2)*(BIN1-BIN0);
39     double q2t = sqrt(kt*kt+q1t*q1t-2*kt*q1t*cos(phi));
40     double mt = sqrt(mass*mass+kt*kt);
41     double e1 = ss*x1/2+pow(q1t,2)/2/ss/x1;
42     double e2 = ss*x2/2+pow(q2t,2)/2/ss/x2;
43     double q1z = -pow(q1t,2)/2/ss/x1+ss*x1/2;
44     double q2z = pow(q2t,2)/2/ss/x2-ss*x2/2;
45     double y = log((e1+e2+q1z+q2z)/(e1+e2-q1z-q2z))/2.;
46     if( q1z < 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
47     if( q2z > 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
48     double q = mt * mu_mult;
49     double alpha_s = pdftable->alphasQ(q);
50     double d1 = pdftable->xfxQ(1, x1, q)/x1;
51     double dbar1 = pdftable->xfxQ(-1, x1, q)/x1;
52     double u1 = pdftable->xfxQ(2, x1, q)/x1;
53     double ubar1 = pdftable->xfxQ(-2, x1, q)/x1;
54     double s1 = pdftable->xfxQ(3, x1, q)/x1;
55     double c1 = pdftable->xfxQ(4, x1, q)/x1;
56     double g1 = pdftable->xfxQ(21, x1, q)/x1;

```

```

57  double d2 = pdftable->xfxQ(1, x1, q)/x2;
58  double dbar2 = pdftable->xfxQ(-1, x1, q)/x2;
59  double u2 = pdftable->xfxQ(2, x1, q)/x2;
60  double ubar2 = pdftable->xfxQ(-2, x1, q)/x2;
61  double s2 = pdftable->xfxQ(3, x1, q)/x2;
62  double c2 = pdftable->xfxQ(4, x1, q)/x2;
63  double g2 = pdftable->xfxQ(21, x1, q)/x2;
64  double s = x1*x2*(ss*ss)+2.*q1t*q1t-2.*q1t*kt*cos(phi)
65  +(q1t*q1t*(q2t*q2t))/(x1*x2*ss*ss);
66  if(s!=s){ ff[0]=0; return 0;}
67  double w = 4.*mc*mc/s;
68  double sigma_shat_gg_to_cAc = M_PI*alpha_s*alpha_s/(3.*s)*
69  ((1.+w+w*w/16.)*log((1.+sqrt(1.-w))/
70  (1.-sqrt(1.-w)))-
71  (7./4.+31./16.*w)*sqrt(1.-w));
72  if(( y < cy0 )||( cy1 < y)){ ff[0]=0;return 0;}
73  if(( s < mass*mass )||( 4.*mD*mD < s)){ ff[0]=0;return 0;}
74  double SUMM = exp(-pow(q1t,2)/q_2Tsr)/(M_PI*q_2Tsr)*
75  exp(-pow(q2t,2)/q_2Tsr)/(M_PI*q_2Tsr)*
76  (g1*g2)*sigma_shat_gg_to_cAc;
77  double dsigma_c_frac_kt_dkt_dy =(2.*M_PI)*kt/(BIN1-BIN0)
78  * Fc * q1t * SUMM * 0.38938e6 * jacob * 0.06;
79  ff[0] = dsigma_c_frac_kt_dkt_dy;
80  return 0;
81 }
82 int main(int argc, char *argv[]){
83 #define NCOMP 1
84 #define USERDATA NULL
85 #define LAST 4
86 #define STATEFILE NULL
87 #define SPIN NULL
88 #define FLATNESS 1e0
89 if(argv[1] != NULL){
90 q_2Tsr = stod(argv[1]);
91 cout << "qt2mean\t" << q_2Tsr << endl;
92 } else {
93 cout << "Argument qt2_sr is Empty" << endl;
94 exit(-1);
95 }
96 int nregions, neval, fail;
97 cubareal integral[NCOMP], error[NCOMP], prob[NCOMP];
98 LHAPDF::setVerbosity(0);
99 pdftable = LHAPDF::mkPDF(pdftablename, 0);
100 for(int i = 0; i < binsNum; i++){
101 BIN0 = binStart + i * binDelta;
102 BIN1 = binStart + (i+1) * binDelta;
103 Suave(NDIM, NCOMP, Integrand, NULL, NVEC,
104 EPSREL, EPSABS, VERBOSE | LAST, SEED,
105 MINEVAL, MAXEVAL, NNEW, NMIN, FLATNESS,
106 STATEFILE, SPIN, &nregions, &neval, &fail,
107 integral, error, prob);
108 printf("%.3f \t%.3f \t%.10f \t%.8f \t%.3f\n",BIN0,BIN1,
109 (double)integral[0], (double)error[0]/(double)integral[0],
110 (double)prob[0]);
111 }
112

```

Для получения программы для расчета вклада кварк-антикварковой аннигиляции необходимо заменить часть кода начиная с 67 строки на:

```

1      double w = 4.*mc*mc/s;
2      double sigma_shat_qAq_to_cAc = 8.*M_PI*alpha_s*
3      alpha_s/(27.*s)*(1.+w/2.)*sqrt(1.-w);
4      double SUMM = exp(-pow(q1t,2)/q_2TsrG)/(M_PI*q_2TsrG)*
5      exp(-pow(q2t,2)/q_2TsrG)/(M_PI*q_2TsrG)*
6      (d1*dbar2+dbar1*d2+2*s1*s2+u1*ubar2+ubar1*u2)*
7      sigma_shat_qAq_to_cAc;

```

### Программа расчета сечения рождения $J/\psi + X$ в ОПМ-уМИЦ для эксперимента PHENIX

Для получения программы расчета сечения рождения  $J/\psi + X$  в ОПМ-уМИЦ для эксперимента PHENIX необходимо назначить переменные и изменить тип дифференциального сечения в конце функции Integrand соответственно:

```

1      double ss = 200;
2      double cy0 = -0.35;
3      double cy1 = 0.35;
4      ...
5      double dsigma_c_frac_kt_dkt_dy =(2.*M_PI)/(BIN1-BIN0) * Fc * q1t * kt *
6      SUMM * 0.38938e6 * jacob / (2.*M_PI*kt)*0.06/0.7;
7      ff[0] = dsigma_c_frac_kt_dkt_dy;

```

### Набор программ расчета сечения рождения $J/\psi + X$ в ОПМ-НРКХД

Программа расчета сечений в ОПМ-НРКХД состоит из подпрограмм, каждая из которых имеет похожую структуру, но вычисляет отдельный вклад в сечение. Структура директорий подпрограмм, кодировка директории задает соответственно реальное состояние и промежуточное виртуальное состояние через которое происходит рождение в соответствии с кодировкой спектральных термов состояний [n 2s+1 L J (1,8)]:

```

1      1301[direct]
2      gluon
3      11008
4      13011[g]
5      13108
6      13128
7      quark
8      13018
9      1310[prompt]
10     gluon
11     11008
12     13101
13     13128
14     quark

```

```

15         13018
16     1311[prompt]
17         gluon
18         11008
19         13108
20         13111[g]
21         13128
22         quark
23         13018
24     1312[prompt]
25         gluon
26         11008
27         13108
28         13121
29         quark
30         13018
31     2301[prompt]
32         gluon
33         11008
34         13108
35         13128
36         23011[g]
37         quark
38         13018

```

Для краткости приведем только программу расчета сечения рождения прямых  $J/\psi$  через синглетное состояние для эксперимента NA3:

```

1     #include "cuba.h"
2     #include "LHAPDF/LHAPDF.h"
3     #include <cmath>
4     LHAPDF::PDF* pdftable;
5     double ss = 19.4;
6     double q_2Tsr = 1.;
7     double mu_mult = 1.;
8     double mass = 3.096;
9     int binsNum = 1;
10    double binStart = 0.0;
11    double binDelta = 4.0;
12    double BIN0;
13    double BIN1;
14    std::string pdftablename = "MSTW2008lo68cl";
15    double cy0 = 0.;
16    double cy1 = 100;
17    int NDIM = 7;
18    int VERBOSE = 0;
19    double EPSREL = 0.01;
20    int MAXEVAL=2000000000;
21    int NNEW = 800000;
22    int NMIN = 260000;
23    double EPSABS = 1.e-19;
24    int NCOMP = 1;
25    int NVEC= 1;
26    int SEED=23;
27    int MINEVAL=0;
28    using namespace std;

```

```

29 static int Integrand(const int *ndim, const cubareal xx[],
30 const int *ncomp, cubareal ff[], void *userdata) {
31     double y = cy0 + (cy1 - cy0) * xx[0];
32     double phi = 2*M_PI*xx[1];
33     double kt = BIN0 + (BIN1 - BIN0)*xx[2];
34     double x1 = xx[3];
35     double q1t = xx[4]/(1. - xx[4]);
36     double q2t = xx[5]/(1. - xx[5]);
37     double phi2 = 2*M_PI*xx[6];
38     double jacob = (BIN1 - BIN0) *
39         (2.*M_PI) *
40         (cy1 - cy0)/pow(1.-xx[4],2)/pow(1.-xx[5],2) *
41         (2.*M_PI);
42     double mass2 = mass*mass;
43     double mt = sqrt( pow(kt,2) + mass2 );
44     double xi1 = exp(y)*mt/ss;
45     double xi2 = exp(-y)*mt/ss;
46     double coTe = -q1t*q2t*cos(phi2) +
47         q2t*kt*cos(phi - phi2) +
48         q1t*kt*cos(phi);
49     double a = (x1-xi1)*pow(ss*ss,2)*x1;
50     double b = mass2*ss*ss*x1 - pow(q1t,2)*ss*ss*xi1 -
51     pow(ss*ss*x1,2)*xi2 +2*ss*ss*x1*coTe;
52     double c = pow(q1t*q2t,2) - pow(q2t,2)*ss*ss*x1*xi2;
53     if( (pow(b,2)-4.*a*c) <= 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
54     double x2 = (-b+sqrt(pow(b,2)-4.0*a*c))/(2.0*a);
55     double Darg = -pow(q1t*q2t,2)/(ss*ss*x1*pow(x2,2))+ss*ss*(x1-xi1)+
56         pow(q2t,2)*xi2/pow(x2,2);
57     if((x2 < 0.0) || (x2 > 1.0)){ ff[0] = 0;return 0;}
58     double q1z = ss*x1/2.-q1t*q1t/(2.*ss*x1);
59     double q2z = -ss*x2/2.+q2t*q2t/(2.*ss*x2);
60     if( q1z < 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
61     if( q2z > 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
62     double q = mt * mu_mult;
63     double alps = pdftable->alphasQ(q);
64     double parton_func_1 = exp(-pow(q1t,2)/q_2Tsr)/(M_PI*q_2Tsr) *
65     pdftable->xfxQ(21, x1, q)/x1;
66     double parton_func_2 = exp(-pow(q2t,2)/q_2Tsr)/(M_PI*q_2Tsr) *
67     pdftable->xfxQ(21, x2, q)/x2;
68     double s = ss*ss*x1*x2 - 2.*q1t*q2t*cos(phi2) + pow(q1t*q2t,2)/(ss*ss*x1*x2);
69     double t = mass2 - exp(y)*mt*pow(q1t,2)/(ss*x1) -
70         exp(-y)*mt*ss*x1 +
71         2.*q1t*kt*cos(phi);
72     double u = mass2 - exp(-y)*mt*pow(q2t,2)/(ss*x2) -
73         exp(y)*mt*ss*x2 +
74         2.*q2t*kt*cos(phi-phi2);
75     if( s < mass2){ ff[0] = 0;return 0;}
76     double m = mass;
77     double m2 = mass2;
78     double M_sqr = pow(M_PI,3) * pow(alps,3) * (320.0 * m)/
79     (81.0 * pow(m2 - t,2) * pow(m2 - u,2) * pow(t + u,2)) *
80     (m2*m2*pow(t,2) - 2*m2*pow(t,3) + pow(t,4) +
81     m2*m2*t*u - 3*m2*pow(t,2)*u +
82     2*pow(t,3)*u + m2*m2*pow(u,2) - 3*m2*t*pow(u,2) +
83     3*pow(t,2)*pow(u,2) -
84     2*m2*pow(u,3) + 2*t*pow(u,3) + pow(u,4));

```

```

85     if(M_sqr < 0){ff[0] = 0;return 0;}
86     double dsigma_tilde = (q1t * q2t * kt)/(8. * M_PI * abs(Darg) * s);
87     ff[0] = dsigma_tilde * 0.38938e6 * parton_func_1 * parton_func_2 * jacob * M_sqr;
88     ff[0] = ff[0] * 0.05971;///(BIN1 - BIN0)
89     return 0;
90 }
91 int main(int argc , char *argv[]){
92     #define NCOMP 1
93     #define USERDATA NULL
94     #define LAST 4
95     #define STATEFILE NULL
96     #define SPIN NULL
97     #define FLATNESS 1e0
98     if(argv[1] != NULL){
99         q_2Tsr = stod(argv[1]);
100        cout << "qt2mean\t" << q_2Tsr << endl;
101    } else {
102        cout << "Argument qt2_sr is Empty" << endl;
103        exit(-1);
104    } if(argv[2] != NULL){
105        mu_mult = stod(argv[2]);
106    } else {
107        cout << "Argument mu_mult is Empty" << endl;
108        exit(-1);
109    }
110    int nregions , neval , fail;
111    cubareal integral[NCOMP] , error[NCOMP] , prob[NCOMP];
112    LHAPDF::setVerbosity(0);
113    pdftable = LHAPDF::mkPDF(pdftablename , 0);
114    for(int i = 0; i < binsNum; i++){
115        BIN0 = binStart + i * binDelta;
116        BIN1 = binStart + (i+1) * binDelta;
117
118        Suave(NDIM, NCOMP, Integrand , NULL, NVEC,
119            EPSREL, EPSABS, VERBOSE | LAST, SEED,
120            MINEVAL, MAXEVAL, NNEW, NMIN, FLATNESS,
121            STATEFILE, SPIN, &nregions , &neval ,
122            &fail , integral , error , prob);
123
124        printf("%.3f \t%.3f \t%.10f \t%.8f \t%.3f\n",BIN0,BIN1 ,
125            (double)integral[0] , (double)error[0]/(double)integral[0] ,(double)prob[0]);
126    }
127 }
128 }

```

### Программа расчета сечения рождения $J/\psi + \gamma$ в ОПМ-МЦС

```

1 #include "cuba.h"
2 #include "LHAPDF/LHAPDF.h"
3 LHAPDF::PDF* pdftable;
4 double ss = 27.;
5 double q_2Tsr = 0.96;
6 double mu_mult = 1.;
7 double mass = 3.096;
8 int binsNum;

```



```

9  double binStart;
10 double binDelta;
11 double BIN0;
12 double BIN1;
13 double section;
14 std::string pdftablename = "MSTW2008lo90cl";
15 double cy0 = -3.;
16 double cy1 = 3.;
17 double cpt0jpsi = 0.0;
18 double cpt1jpsi = 3.0;
19 double cpt0gm = 0.5;
20 double cpt1gm = 3.0;
21 int NDIM = 7;
22 int VERBOSE = 0;
23 double EPSREL = 0.01;
24 int MAXEVAL=200000000;
25 int NNEW = 800000;
26 int NMIN = 260000;
27 double EPSABS = 1.e-19;
28 int NCOMP = 1;
29 int NVEC= 1;
30 int SEED=23;
31 int MINEVAL=0;
32 using namespace std;
33 static int Integrand(const int *ndim, const cubareal xx[],
34   const int *ncomp, cubareal ff[], void *userdata) {
35   double ktpsi = cpt0jpsi + (cpt1jpsi - cpt0jpsi)*xx[0];
36   double phi = 2*M_PI*xx[1];
37   double y = cy0 + (cy1 - cy0) * xx[2];
38   double x1 = xx[3];
39   double q1t = xx[4]/(1. - xx[4]);
40   double q2t = xx[5]/(1. - xx[5]);
41   double phi2 = 2*M_PI*xx[6];
42   double kt = ktpsi;
43   double jacob = (cpt1jpsi - cpt0jpsi) *
44     (2.*M_PI) *
45     (cy1 - cy0)/pow(1.-xx[4],2)/pow(1.-xx[5],2) *
46     (2.*M_PI);
47   double mass2 = mass*mass;
48   double mass4 = mass2*mass2;
49   double mt = sqrt( pow(kt,2) + mass2 );
50   double xi1 = exp(y)*mt/ss;
51   double xi2 = exp(-y)*mt/ss;
52   double coTe = -q1t*q2t*cos(phi2) +
53     q2t*kt*cos(phi - phi2) +
54     q1t*kt*cos(phi);
55   double a = pow(ss*ss*x1,2)-pow(ss*ss,2)*x1*xi1;
56   double b = mass2*ss*ss*x1 - pow(q1t,2)*ss*ss*xi1 -
57     pow(ss*ss*x1,2)*xi2 +2*ss*ss*x1*coTe;
58   double c = pow(q1t*q2t,2) - pow(q2t,2)*ss*ss*x1*xi2;
59   if( (pow(b,2)-4.*a*c) < 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
60   double x2 = (-b+sqrt(pow(b,2.0)-4.0*a*c))/(2.0*a);
61   double Darg = -pow(q1t*q2t,2)/(ss*ss*x1*pow(x2,2))+ss*ss*(x1-xi1)+
62     pow(q2t,2)*xi2/pow(x2,2);
63   if((x2 < 0.0) || (x2 > 1.0)){ ff[0] = 0;return 0;}
64   double q10 = ss*x1/2+q1t*q1t/(2*ss*x1);

```

```

65  double q20 = ss*x2/2+q2t*q2t/(2*ss*x2);
66  double q1z = ss*x1/2-q1t*q1t/(2*ss*x1);
67  double q2z = -ss*x2/2+q2t*q2t/(2*ss*x2);
68  if( q1z < 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
69  if( q2z > 0 ){ ff[0] = 0;return 0;}
70  double q = mt * mu_mult;
71  double alp = 1./137.;
72  double alps = pdftable ->alphasQ(q);
73  double parton_func_1 = exp(-pow(q1t ,2)/q_2Tsr)/(M_PI*q_2Tsr) *
74  pdftable ->xfxQ(21, x1, q)/x1;
75  double parton_func_2 = exp(-pow(q2t ,2)/q_2Tsr)/(M_PI*q_2Tsr) *
76  pdftable ->xfxQ(21, x2, q)/x2;
77  double s = ss*ss*x1*x2 - 2.*q1t*q2t*cos(phi2) +
78  pow(q1t*q2t ,2)/(ss*ss*x1*x2);
79  double t = mass2 - exp(y)*mt*pow(q1t ,2)/(ss*x1) -
80  exp(-y)*mt*ss*x1 +
81  2.*q1t*kt*cos(phi);
82  double u = mass2 - exp(-y)*mt*pow(q2t ,2)/(ss*x2) -
83  exp(y)*mt*ss*x2 +
84  2.*q2t*kt*cos(phi-phi2);
85  if( s < pow( sqrt( mass2 + pow(cpt0jpsi ,2) ) + cpt0gm ,2) )
86  { ff[0] = 0;return 0;}
87  double ktgm = sqrt( kt*kt+q1t*q1t+q2t*q2t
88  +2.*q1t*q2t*cos(phi2)-2.*q1t*kt*cos(phi)-2.*q2t*kt*cos(phi-phi2) );
89  double ygm = 1./2. * log( (q10+q20+q1z+q2z-mt*exp(y))/
90  (q10+q20-q1z-q2z-mt*exp(-y)) );
91  double ktTot = sqrt( q1t*q1t+q2t*q2t+q1t*q2t*cos(phi2) );
92  double dphi = abs( acos( (q1t*kt*cos(phi)+q2t*kt*
93  cos(phi-phi2)-kt*kt)/(kt*ktgm) ) );
94  if((ktgm < cpt0gm) || ( cpt1gm < ktgm)){ ff[0] = 0;return 0;};
95  if((ygm < cy0) || ( cy1 < ygm)){ ff[0] = 0;return 0;};
96  if( section == 0 )
97  if((kt < BIN0) || ( BIN1 < kt)){ ff[0] = 0;return 0;};
98  if( section == 1 )
99  if((ktgm < BIN0) || ( BIN1 < ktgm)){ ff[0] = 0;return 0;};
100 if( section == 2 )
101 if((y < BIN0) || ( BIN1 < y)){ ff[0] = 0;return 0;};
102 if( section == 3 )
103 if((ygm < BIN0) || ( BIN1 < ygm)){ ff[0] = 0;return 0;};
104 if( section == 4 )
105 if((sqrt(s) < BIN0) || ( BIN1 < sqrt(s))){ ff[0] = 0;return 0;};
106 if( section == 5 )
107 if((ktTot < BIN0) || ( BIN1 < ktTot)){ ff[0] = 0;return 0;};
108 if( section == 6 )
109 if((abs(y-ygm) < BIN0) || ( BIN1 < abs(y-ygm))){ ff[0] = 0;return 0;};
110 if( section == 7 )
111 if((dphi < BIN0) || ( BIN1 < dphi)){ ff[0] = 0;return 0;};
112 double m = mass;
113 double O3s11 = 1.3;
114 double M_sqr = (1024*O3s11*m*pow(M_PI,3)*(pow(m,4)*pow(t ,2) -
115 2*pow(m,2)*pow(t ,3) + pow(t ,4) + pow(m,4)*t*u -
116 3*pow(m,2)*pow(t ,2)*u + 2*pow(t ,3)*u + pow(m,4)*pow(u ,2)
117 - 3*pow(m,2)*t*pow(u ,2) + 3*pow(t ,2)*pow(u ,2) -
118 2*pow(m,2)*pow(u ,3) + 2*t*pow(u ,3) + pow(u ,4))* alp*
119 pow( alps ,2))/(243.*pow(pow(m,2) - t ,2)*pow(pow(m,2) - u ,2)
120 *pow(t + u ,2));

```

```

121     if(M_sqr < 0){ff[0] = 0;return 0;}
122     double dsigma_tilde = (q1t * q2t * kt)/(8. * M_PI * abs(Darg) * s);
123     ff[0] = dsigma_tilde * 0.38938e6 * parton_func_1
124     * parton_func_2 * jacob * M_sqr;
125     ff[0] = ff[0]/(BIN1 - BIN0);
126     return 0;
127 }
128 int main(int argc , char *argv []){
129     #define NCOMP 1
130     #define USERDATA NULL
131     #define LAST 4
132     #define STATEFILE NULL
133     #define SPIN NULL
134     #define FLATNESS 1e0
135     for(int sectionI = 0; sectionI < 8; sectionI++){
136         section = sectionI;
137
138         string sectionName;
139         if( section == 0 )
140         {sectionName="kt";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = 0.25;}
141         if( section == 1 )
142         {sectionName="ktgm";binsNum = 22;binStart = 0.5;binDelta = 0.25;}
143         if( section == 2 )
144         {sectionName="y";binsNum = 24;binStart = -3.0;binDelta = 0.25;}
145         if( section == 3 )
146         {sectionName="ygm";binsNum = 24;binStart = -3.0;binDelta = 0.25;}
147         if( section == 4 )
148         {sectionName="M";binsNum = 24;binStart = 3.5;binDelta = 0.25;}
149         if( section == 5 )
150         {sectionName="totPT";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = 0.25;}
151         if( section == 6 )
152         {sectionName="dy";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = 0.25;}
153         if( section == 7 )
154         {sectionName="dphi";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = M_PI/24.;}
155         std::cout << sectionName << std::endl;
156         int nregions , neval , fail;
157         cubareal integral[NCOMP], error[NCOMP], prob[NCOMP];
158         LHAPDF::setVerbosity(0);
159         pdftable = LHAPDF::mkPDF(pdftablename , 0);
160         for(int i = 0; i < binsNum; i++){
161             BIN0 = binStart + i * binDelta;
162             BIN1 = binStart + (i+1) * binDelta;
163             Suave(NDIM, NCOMP, Integrand , NULL, NVEC,
164                 EPSREL, EPSABS, VERBOSE | LAST, SEED,
165                 MINEVAL, MAXEVAL, NNEW, NMIN, FLATNESS,
166                 STATEFILE, SPIN, &nregions , &neval , &fail , integral , error , prob);
167             printf("%.3f \t%.3f \t%.10f \t%.8f \t%.3f\n",BIN0,BIN1,(double)integral[0],
168                 (double)error[0] , (double)prob[0]);
169         }
170     }
171 }

```

## Программа расчета сечения рождения $J/\psi + \gamma$ в ОПМ-уМЦС

Структура файлов программы:

```

1      m2
2          //не представлен в работе изза - слишком большого выражения
3      result_pr_trick_g_g_c_ac_gamma.wl.cpp //матричный элемент
4      src
5          Darg.cpp //коэффициент из формулы дельта функции - сложноаргумента
6          s.cpp //инварианты
7          t.cpp //инварианты
8          u.cpp //инварианты
9          w1.cpp //инварианты
10         w2.cpp //инварианты
11         x1.cpp //решение x1
12         x2.cpp //решение x2
13     main.cpp //основная программа

```

### main.cpp

```

1      #include "cuba.h"
2      #include "LHAPDF/LHAPDF.h"
3      #include <string>
4      #include <fstream>
5      #include <iostream>
6      #include <time.h>
7      using namespace std;
8      LHAPDF::PDF* pdfTable;
9      double ss = 27.;
10     double q_2Tsr_G = 0.96;
11     double q_2Tsr_Q = 0.29;
12     double mu_mult = 1.;
13     int section;
14     double mass = 3.096;
15     double mc = 1.3;
16     double mD = 1.86962;
17     int binsNum = 12;
18     double binStart = 0.0;
19     double binDelta = 0.25;
20     double BIN0;
21     double BIN1;
22     std::string pdfTableName = "MSTW2008lo90cl";
23     double cy0 = -3.;
24     double cy1 = 3.;
25     double cpt0 = 0.;
26     double cpt1 = 3.;
27     double cy0ga = -3.;
28     double cy1ga = 3.;
29     double cpt0ga = 0.5;
30     double cpt1ga = 3.;
31     int NDIM = 10;
32     int VERBOSE = 1;
33     double EPSREL = 0.5;
34     int MAXEVAL=2000000;
35     int NNEW = 80000;
36     int NMIN = 26000;
37     double EPSABS = 1.e-19;
38     int NCOMP = 1;
39     int NVEC= 1;
40     int MINEVAL=0;
41     double sign(double x){return x/abs(x);}

```

```

42 static int Integrand(const int *ndim, const cubareal xx[],
43   const int *ncomp, cubareal ff[], void *userdata) {
44   double M2 = pow(mass,2) + (4.*pow(mD,2)-pow(mass,2))*xx[0];
45   double M = sqrt(M2);
46   double y3 = cy0ga + (cylga - cy0ga) * xx[1];
47   double y = cy0 + (cyl - cy0) * xx[2];
48   double ktpsi = cpt0 + (cpt1 - cpt0) * xx[3];
49   double kt = ktpsi*M/mass;
50   double thetacs = M_PI*xx[4];
51   double phics = 2*M_PI*xx[5];
52   double phi1 = 2*M_PI*xx[6];
53   double phi3 = 2*M_PI*xx[7];
54   double k3t = cpt0ga + (cpt1ga - cpt0ga)*xx[8];
55   double q1t = xx[9]/(1 - xx[9]);
56   double qt = kt; // alias
57   double mt = sqrt(M2+pow(kt,2)); //попробовать ktpsi
58   double mass2 = mass*mass;
59   double jacob = (4.*pow(mD,2)-pow(mass,2))* (cylga - cy0ga)*
60     (cyl - cy0)* (cpt1 - cpt0)*
61     M_PI*(2*M_PI)*(2*M_PI)*(2*M_PI)*
62     (cpt1ga-cpt0ga)/pow(1-xx[9],2);
63   double q2t = sqrt(-2.*q1t*(kt*cos(phi1)+k3t*cos(phi1-
64     phi3))+2.*k3t*kt*cos(phi3)+k3t*k3t+kt*kt+q1t*q1t);
65   if(q2t!=q2t){ff[0]=0;return 0;}
66   if(q2t < 0.0){ff[0]=0;return 0;}
67   double CHEK;
68   CHEK = 1.; //variable for x1 x2, set the + or - root
69   double x1;
70   #include "src/x1.cpp"
71   if(x1!=x1){ff[0]=0;return 0;}
72   if(( x1 < 0.0 )|| ( 1.0 < x1 )){ff[0]=0;return 0;}
73
74   CHEK = 1.; //variable for x1 x2, set the + or - root
75   double x2;
76   #include "src/x2.cpp"
77   if(x2!=x2){ff[0]=0;return 0;}
78   if(( x2 < 0.0 )|| ( 1.0 < x2 )){ff[0]=0;return 0;}
79   double s;
80   #include "src/s.cpp"
81   if(s!=s){ff[0]=0;return 0;}
82   double t;
83   #include "src/t.cpp"
84   if(t!=t){ff[0]=0;return 0;}
85   double u;
86   #include "src/u.cpp"
87   if(u!=u){ff[0]=0;return 0;}
88   if(abs(s+t+u-M2)>1e-9){ff[0] = 0;return 0;};
89   double w1;
90   #include "src/w1.cpp"
91   if(w1!=w1){ff[0]=0;return 0;}
92   double w2;
93   #include "src/w2.cpp"
94   if(w2!=w2){ff[0]=0;return 0;}
95   double q = sqrt(mass2+ktpsi*ktpsi) * mu_mult;
96   double alps = pdftable->alphasQ(q);
97   double alp = 1./137.;

```

```

98     double g1 = pdftable->xfxQ(21, x1, q)/x1;
99     double g2 = pdftable->xfxQ(21, x2, q)/x2;
100    double pr_trick_g_g_c_ac_gamma;
101    double part_g_g;
102    #include "m2/result_pr_trick_g_g_c_ac_gamma.wl.cpp"
103    if(pr_trick_g_g_c_ac_gamma != pr_trick_g_g_c_ac_gamma){ ff[0] = 0;return 0;}
104    if(pr_trick_g_g_c_ac_gamma < 0){ ff[0] = 0;return 0;}
105    part_g_g = exp(-pow(q1t,2)/q_2Tsr_G)/(M_PI*q_2Tsr_G) *
106    exp(-pow(q2t,2)/q_2Tsr_G)/(M_PI*q_2Tsr_G) *
107        (g1*g2 * pr_trick_g_g_c_ac_gamma);
108    double totPT = sqrt( 2.*k3t*kt*cos(phi3)+k3t*k3t+kt*kt );
109    if(section == 0)if((ktpsi < BIN0) || (BIN1 < ktpsi)){ ff[0] = 0;return 0;};
110    if(section == 1)if((k3t < BIN0) || (BIN1 < k3t)){ ff[0] = 0;return 0;};
111    if(section == 2)if((y < BIN0) || (BIN1 < y)){ ff[0] = 0;return 0;};
112    if(section == 3)if((y3 < BIN0) || (BIN1 < y3)){ ff[0] = 0;return 0;};
113    if(section == 4)if((M < BIN0) || (BIN1 < M)){ ff[0] = 0;return 0;};
114    if(section == 5)if((totPT < BIN0) || (BIN1 < totPT)){ ff[0] = 0;return 0;};
115    if(section == 6)if((abs(y-y3) < BIN0) || (BIN1 < abs(y-y3))){ ff[0] = 0;return 0;};
116    if(section == 7)if((phi3 < BIN0) || (BIN1 < phi3)){ ff[0] = 0;return 0;};
117    double Darg;
118    #include "src/Darg.cpp"
119    if(Darg!=Darg){ ff[0]=0;return 0;}
120    Darg = abs(Darg);
121    ff[0] = q1t*kt*k3t*sin(thetacs)*sqrt(1.-4.*pow(mc,2)/M2)/
122    (pow(2.0*M_PI,4)*64.*s*Darg);
123    ff[0] = ff[0] * 0.38938e6 * jacob * part_g_g;
124    ff[0] = ff[0]/(BIN1-BIN0) * 0.33;
125    return 0;
126 }
127 int main(int argc, char *argv[]){
128 #define NCOMP 1
129 #define USERDATA NULL
130 #define LAST 4
131 #define STATEFILE NULL
132 #define SPIN NULL
133 #define FLATNESS 300e0
134 for(int sectionI = 0; sectionI < 8; sectionI++){
135     section = sectionI;
136     string sectionName;
137     if( section == 0 )
138     {sectionName="kt";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = 0.25;}
139     if( section == 1 )
140     {sectionName="ktgm";binsNum = 22;binStart = 0.5;binDelta = 0.25;}
141     if( section == 2 )
142     {sectionName="y";binsNum = 24;binStart = -3.0;binDelta = 0.25;}
143     if( section == 3 )
144     {sectionName="ygm";binsNum = 24;binStart = -3.0;binDelta = 0.25;}
145     if( section == 4 )
146     {sectionName="M";binsNum = 24;binStart = 3.5;binDelta = 0.25;}
147     if( section == 5 )
148     {sectionName="totPT";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = 0.25;}
149     if( section == 6 )
150     {sectionName="dy";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = 0.25;}
151     if( section == 7 )
152     {sectionName="dphi";binsNum = 24;binStart = 0.0;binDelta = M_PI/24.;}
153 }

```

```

154     std::cout << sectionName << std::endl;
155
156     int nregions, neval, fail;
157     cubareal integral[NCOMP], errorI[NCOMP], prob[NCOMP];
158
159     LHAPDF::setVerbosity(0);
160     pdftable = LHAPDF::mkPDF(pdftablename, 0);
161
162     for(int i = 0; i < binsNum; i++){
163         BIN0 = binStart + i * binDelta;
164         BIN1 = binStart + (i+1) * binDelta;
165
166         Suave(NDIM, NCOMP, Integrand, NULL, NVEC,
167             EPSREL, EPSABS, VERBOSE | LAST, /*SEED*/time(NULL),
168             MINEVAL, MAXEVAL, NNEW, NMIN, FLATNESS,
169             STATEFILE, SPIN, &nregions, &neval, &fail,
170             integral, errorI, prob);
171
172         printf("%.3f \t%.3f \t%.10f \t%.8f \t%.3f\n",
173             BIN0, BIN1, (double)integral[0], (double)errorI[0], (double)prob[0]);
174     }
175 }
176 }

```

### src/Darg.cpp

```

1     Darg = (ss/2. - pow(q2t,2)/(2.*ss*pow(x2,2)))*(ss/2. +
2     pow(q1t,2)/(2.*ss*pow(x1,2)) - (-2*pow(ss,2)*x1 + 2*mt*ss*cosh(y) +
3     2*k3t*ss*cosh(y3) + (-8*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*x1 + 2*(2*pow(ss,2)*x1 -
4     2*mt*ss*cosh(y) - 2*k3t*ss*cosh(y3)))*(pow(q1t,2) +
5     pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) -
6     2*k3t*ss*x1*cosh(y3)))/(2.*sqrt(-4*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*pow(x1,2) +
7     pow(pow(q1t,2) + pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) -
8     2*k3t*ss*x1*cosh(y3),2)))/(4.*ss*x1) -
9     (pow(q2t,2)*ss*x1*(-2*pow(ss,2)*x1 + 2*mt*ss*cosh(y) +
10    2*k3t*ss*cosh(y3) + (-8*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*x1 + 2*(2*pow(ss,2)*x1 -
11    2*mt*ss*cosh(y) - 2*k3t*ss*cosh(y3)))*(pow(q1t,2) +
12    pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) -
13    2*k3t*ss*x1*cosh(y3)))/(2.*sqrt(-4*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*pow(x1,2) +
14    pow(pow(q1t,2) + pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) -
15    2*k3t*ss*x1*cosh(y3),2))))/pow(-pow(q1t,2) - pow(ss,2)*pow(x1,2) +
16    2*mt*ss*x1*cosh(y) + 2*k3t*ss*x1*cosh(y3) +
17    sqrt(-4*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*pow(x1,2) + pow(pow(q1t,2) +
18    pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) -
19    2*k3t*ss*x1*cosh(y3),2)),2) + (pow(q2t,2)*ss)/(-pow(q1t,2) -
20    pow(ss,2)*pow(x1,2) + 2*mt*ss*x1*cosh(y) + 2*k3t*ss*x1*cosh(y3) +
21    sqrt(-4*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*pow(x1,2) + pow(pow(q1t,2) +
22    pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) - 2*k3t*ss*x1*cosh(y3),2)))
23    + (-pow(q1t,2) - pow(ss,2)*pow(x1,2) + 2*mt*ss*x1*cosh(y) +
24    2*k3t*ss*x1*cosh(y3) + sqrt(-4*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*pow(x1,2) +
25    pow(pow(q1t,2) + pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) -
26    2*k3t*ss*x1*cosh(y3),2)))/(4.*ss*pow(x1,2)));

```

### s.cpp

```

1     s = -pow(kt,2) + pow(mt,2) - 2*k3t*kt*cos(phi3) + 2*k3t*mt*cosh(y - y3);

```

### t.cpp

```
1 t = -pow(kt,2) + pow(mt,2) + 2*kt*q1t*cos(phi1) - (mt*(pow(q1t,2) +
2 pow(ss,2)*pow(x1,2))*cosh(y))/(ss*x1) + mt*(-(pow(q1t,2)/(ss*x1)) +
3 ss*x1)*sinh(y);
```

### u.cpp

```
1 u = -((k3t*(-2*q1t*ss*x1*cos(phi1 - phi3) + (pow(q1t,2) +
2 pow(ss,2)*pow(x1,2))*cosh(y3) + (pow(q1t,2) - pow(ss,2)*pow(x1,2))*
3 sinh(y3)))/(ss*x1));
```

### w1.cpp

```
1 w1 = -pow(-0.5*kt + q1t*cos(phi1) - (sqrt(pow(M,2) -
2 4*pow(mc,2))*sqrt(pow(M,2) +
3 pow(qt,2))*cos(phics)*sin(thetacs))/(2.*M),2) - pow(q1t*sin(phi1) -
4 (sqrt(pow(M,2) - 4*pow(mc,2))*sign(y)*sin(phics)*sin(thetacs))/2.,2)
5 - pow(-0.5*pow(q1t,2)/(ss*x1) + (ss*x1)/2. - (sqrt(pow(M,2) -
6 4*pow(mc,2))*(cos(thetacs)*cosh(y)*sign(y) +
7 (qt*cos(phics)*sin(thetacs)*sin(y))/M))/2. - (mt*sinh(y))/2.,2) +
8 pow(pow(q1t,2)/(2.*ss*x1) + (ss*x1)/2. - (mt*cosh(y))/2. -
9 (sqrt(pow(M,2) - 4*pow(mc,2))*((qt*cos(phics)*cosh(y)*sin(thetacs))/M
10 + cos(thetacs)*sign(y)*sinh(y))/2.,2);
```

### w2.cpp

```
1 w2 = -pow(kt/2. - q1t*cos(phi1) + k3t*cos(phi3) + (sqrt(pow(M,2) -
2 4*pow(mc,2))*sqrt(pow(M,2) +
3 pow(qt,2))*cos(phics)*sin(thetacs))/(2.*M),2) - pow(-(q1t*sin(phi1))
4 + k3t*sin(phi3) + (sqrt(pow(M,2) -
5 4*pow(mc,2))*sign(y)*sin(phics)*sin(thetacs))/2.,2) +
6 pow(-0.5*pow(q1t,2)/(ss*x1) - (ss*x1)/2. + (mt*cosh(y))/2. +
7 k3t*cosh(y3) + (sqrt(pow(M,2) -
8 4*pow(mc,2))*((qt*cos(phics)*cosh(y)*sin(thetacs))/M +
9 cos(thetacs)*sign(y)*sinh(y))/2.,2) - pow(pow(q1t,2)/(2.*ss*x1) -
10 (ss*x1)/2. + (sqrt(pow(M,2) -
11 4*pow(mc,2))*(cos(thetacs)*cosh(y)*sign(y) +
12 (qt*cos(phics)*sin(thetacs)*sin(y))/M))/2. + (mt*sinh(y))/2. +
13 k3t*sinh(y3),2);
```

### x1.cpp

```
1 x1 = (exp(y + y3)*(ss*(pow(k3t,2) + pow(mt,2) + pow(q1t,2) - pow(q2t,2) +
2 2*k3t*mt*cosh(y - y3)) + CHEK * sqrt(pow(ss,2)*(-4*pow(q1t,2)*(pow(k3t,2) +
3 pow(mt,2) + 2*k3t*mt*cosh(y - y3)) + pow(pow(k3t,2) + pow(mt,2) +
4 pow(q1t,2) - pow(q2t,2) + 2*k3t*mt*cosh(y -
5 y3),2)))))/(2.*(exp(y)*k3t + exp(y3)*mt)*pow(ss,2));
```

### x2.cpp

```
1 x2 = (-pow(q1t,2) - pow(ss,2)*pow(x1,2) + 2*mt*ss*x1*cosh(y) +
2 2*k3t*ss*x1*cosh(y3) + CHEK * sqrt(-4*pow(q2t,2)*pow(ss,2)*pow(x1,2) +
3 pow(pow(q1t,2) + pow(ss,2)*pow(x1,2) - 2*mt*ss*x1*cosh(y) -
4 2*k3t*ss*x1*cosh(y3),2)))/(2.*pow(ss,2)*x1);
```