

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева
(Самарский университет)

Естественнонаучный институт
Физический факультет
Кафедра общей и теоретической физики

Выпускная квалификационная работа

**Рождение η_c мезонов в обобщенной партонной
модели**

По направлению подготовки 03.03.02 Физика
(уровень бакалавриата)
направленность (профиль) Физика

Обучающийся _____ Ануфриев А.В.

Руководитель ВКР
д.ф.-м.н., профессор _____ Салеев В.А.

Самара, 2022 г.

Реферат

Полный объем ВКР – 39 страниц, работа включает в себя 25 рисунков, 3 таблицы и список использованных источников на 39 наименований.

ПРЯМЫЕ ФОТОНЫ, ЧАРМОНИЙ, ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ, КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА, СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ, МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, КОЛЛАЙДЕР NICA, ПАРТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ФУНКЦИИ ПАРТОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ.

Целью данной работы являлось предсказание возможности наблюдения пика η_c -мезона в сечении по инвариантной массе двух фотонов на фоне всевозможных вкладов прямого дифотонного рождения в эксперименте с параметрами коллайдера NICA.

В первой главе приводятся основные современные представления о фундаментальных взаимодействиях и фундаментальных частицах в рамках Стандартной модели.

Во второй главе приведена формула факторизации для коллинеарной партонной модели, способы определения партонных функций распределения и кинематика для процесса $2 \text{ в } 2$.

В третьей главе вводится формула факторизации для обобщенной партонной модели и кинематики для процесса $2 \text{ в } 1$ и $2 \text{ в } 2$.

В четвертой главе представлены модели адронизации и результаты расчетов сечений рождения η_c -мезона в КПМ и ОПМ.

В пятой главе приводится информация о процессах фрагментации кварков и глюонов в фотоны и приводятся результаты расчетов сечений для дифотонного рождения с учетом фрагментации и без нее.

В шестой главе находится квадрат амплитуды большого процесса $g + g \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma + \gamma$ в ОПМ и рассчитывается соотношение сигнал-фон для рождения η_c -мезона на коллайдере NICA.

В седьмой главе обсуждается важность учета распада π_0 -мезонов среди фоновых процессов и приводятся результаты расчетов инклюзивного рождения нейтральных пионов на коллайдере NICA, приводится результат расчета отношения сигнал-фон с учетом фотонов от пионного распада и делается окончательный вывод о возможности наблюдения фотонов от распада η_c -мезона в эксперименте NICA.

Содержание

Реферат	2
Введение	4
1 Стандартная модель	6
1.1 Фундаментальные частицы и взаимодействия	6
1.2 Кваркони	7
1.3 Квантовая хромодинамика	8
1.4 Партонная модель	10
2 Коллинеарная партонная модель	11
2.1 Партонные функции распределения в КПМ	11
2.2 Кинематика для процесса 2 в 2 в КПМ	14
3 Обобщенная партонная модель	16
3.1 Кинематика для процесса 2 в 2 в ОПМ	17
3.2 Кинематика процесса 2 в 1 в ОПМ	19
4 Рождение η_c-мезонов в партонной модели	19
4.1 Модели адронизации	19
4.2 Квадраты амплитуд для процессов рождения η_c -мезона	20
4.3 Результаты расчетов	20
5 Парное рождение фотонов в партонной модели	23
5.1 Фрагментационное рождение фотонов	23
5.2 Квадраты амплитуд для процессов дифотонного рождения	24
5.3 Результаты расчетов	25
6 Рождение фотонов в распадах η_c-мезонов на коллайдере NICA	28
6.1 Построение квадрата амплитуды процесса $gg \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma\gamma$	28
6.2 Результаты расчетов	30
7 Рождение фотонов в распадах π_0-мезонов	31
7.1 Фрагментационное рождение π_0 -мезонов и подпроцессы	31
7.2 Результаты расчетов	32
Заключение	35
Определения, обозначения и сокращения	36
Список используемой литературы	37

Введение

По предложению коллаборации Spin Physics Detector (SPD) [1] произойдет установка универсального детектора на строящемся в данный момент в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ), Дубна коллайдере NICA (рисунок 1). Это позволит провести исследования спиновой структуры протона и связанных со спином явлений с поляризованными пучками протонов и дейтронов. Столкновения пучков планируется производить при энергиях $\sqrt{s} < 27$ [ГэВ].

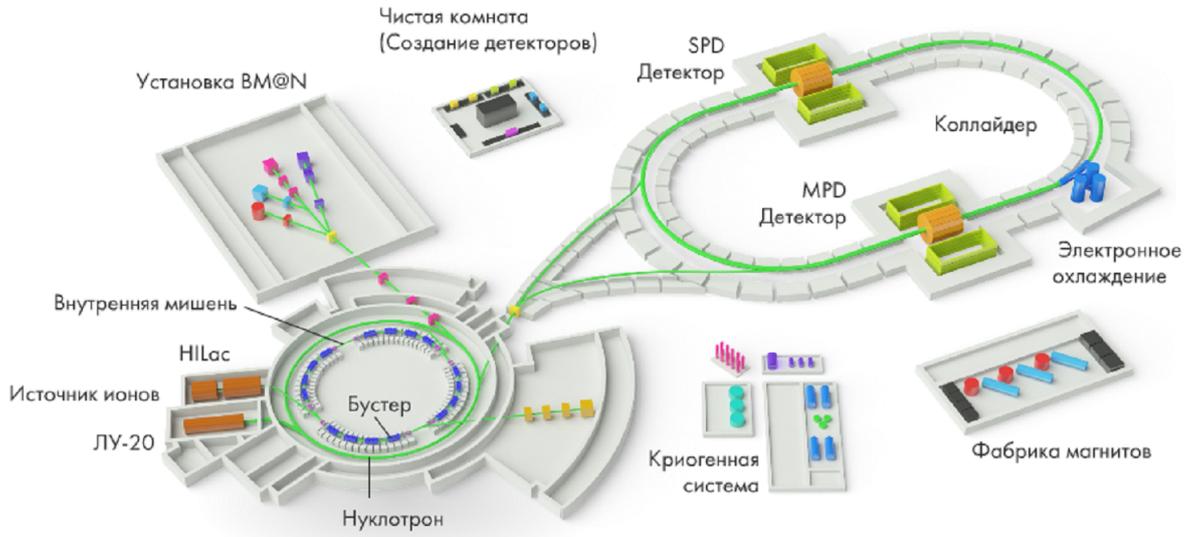


Рис. 1: Ускорительный комплекс NICA

Эксперимент SPD по рассеянию протонных пучков займет кинематическую нишу между измерениями при низких энергиях на ANKE-COSY [2] или SATURNE [3] и высокоэнергетическими измерениями на RHIC [4]. Планируется, что SPD будет работать как универсальная установка для изучения структуры нуклонов, используя различные процессы, такие как рождение чармония и рождение прямых фотонов, которым и посвящена данная ВКР. Результаты, которые, как ожидается, будут получены на SPD, будут играть важную роль в общем понимании партонной структуры нуклонов и послужат дополнительным вкладом в текущие и запланированные исследования в RHIC.

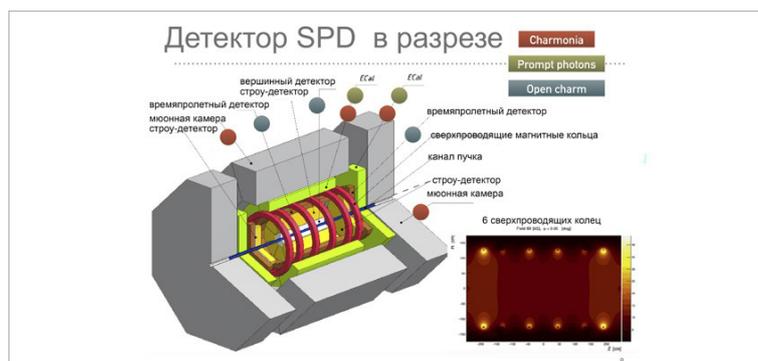


Рис. 2: Универсальный детектор SPD

Цели ВКР:

- Вывод расчетной формулы для дифференциального сечения парного рождения прямых фотонов и η_c -мезона в КПМ и ОПМ
- Предсказание дифференциальных сечений для дифотонного рождения и рождения η_c -мезона при параметрах коллайдера NICA ($\sqrt{S}=27$ [ГэВ], $|y| < 3$, $0 < p_T < 6$ [ГэВ]) [5]
- Исследование возможности наблюдения η_c -мезона в двухфотонных распадах в эксперименте с параметрами коллайдера NICA

Актуальность работы заключается в том, что

1. Планирующееся исследование коллаборацией SPD NICA процессов рождения η_c мезонов в протон-протонных взаимодействиях требует предварительного расчета отношения сигнал-фон для оценки возможности измерения сечения рождения η_c мезонов
2. Проверка различных моделей адронизации пары очарованных кварка и антикварка в конечный чармоний имеет существенное значение для проверки гипотезы факторизации

Научная новизна ВКР состоит в том, что в работе впервые предсказываются дифференциальные сечения рождения η_c -мезонов в двухфотонных распадах и парного рождения фотонов в будущем эксперименте SPD на коллайдере NICA

1 Стандартная модель

1.1 Фундаментальные частицы и взаимодействия

Стандартная модель - модель в физике частиц, описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия методами квантовой теории поля. Теория была построена в 70-х годах XX века, после обнаружения структуры адронов [6]. Результаты экспериментов, проводимых в дальнейшем, подтвердили адекватность данной модели. Например, в 1983 г. в CERN были экспериментально обнаружены промежуточные векторные W_{\pm} - и Z^0 -бозоны [7], предсказанные в электрослабой теории С. Вайнберга, Ш. Глэшоу и А. Салама, а в 2011 г. коллаборациями ATLAS и CMS найден бозон Хиггса [8], последняя из предсказываемых в СМ частиц. Поэтому на данный момент СМ - основная модель в физике частиц.

Выделяют два типа частиц в стандартной модели: из фермионов - кварков и лептонов состоит материя, а бозоны переносят взаимодействие.

Таблица 1: Фундаментальные частицы в СМ

Бозоны	Фотон γ	Глюон g	Z-бозон Z^0	W-бозон W^{\pm}
	Скалярный бозон			Бозон Хиггса H^0
Поколения		1	2	3
Фермионы	Кварки	Верхний u	Очарованный c	Истинный t
		Нижний d	Странный s	Прелестный b
	Лептоны	Электрон e	Мюон μ	Тау-лептон τ
		Электронное нейтрино ν_e	Мюонное нейтрино ν_{μ}	Тау-нейтрино ν_{τ}

Кварки на данный момент считаются бесструктурными частицами, не наблюдаемыми в свободном состоянии. Известно 6 сортов ("ароматов") кварков, разделенных на 3 поколения. В первое поколение входят нижний (d) и верхний (u) кварки, во второе - странный (s) и очарованный (c), а третье поколение составлено из прелестного (b) и истинного (t) кварков. Внутри поколений кварки отличаются зарядом и массами, а каждое новое поколение отделяют пары кварков, массы которых на 1-2 порядка больше, чем в предыдущем поколении. Кварки, как и переносчики сильного взаимодействия глюоны, обладают особой характеристикой - цветом. Часто его называют также цветовой заряд, т.к. в квантовой хромодинамике он играет роль, почти аналогичную электрическому заряду в электродинамике. Кварки участвуют в сильном, слабом и электромагнитном взаимодействии. Из-за особенностей сильного взаимодействия существует проблема конфайнмента - невозможности существования свободных кварков. Обнаружить в свободном состоянии можно только "бесцветные" кварковые системы.

Таблица 2: Поколения кварков

q	$-\frac{1}{3}q_e$	$\frac{2}{3}q_e$
Первое поколение	d-кварк(down)	u-кварк(up)
Второе поколение	s-кварк(strange)	c-кварк(charmed)
Третье поколение	b-кварк(beauty)	t-кварк(truth)

Частицы взаимодействуют, обмениваясь виртуальными бозонами - частицами-переносчиками взаимодействия. На данный момент известно четыре фундаментальных взаимодействия - гравитационное, сильное, слабое и электромагнитное. Для каждого взаимодействия имеется бозон-переносчик: для гравитационного это гравитон (гипотетическая частица), для сильного - глюон, для слабого - W_{\pm} и Z_0 -бозоны, для электромагнитного - фотон. Эти взаимодействия можно назвать фундаментальными, потому что их нельзя свести к более фундаментальным. Гравитация и электромагнетизм - дальнедействующие силы, связанные с ними явления наблюдаются и в макромире. Сильное и слабое взаимодействия существуют на ядерном масштабе. Со слабым взаимодействием связаны т.н. слабые распады частиц, например, β -распад нейтрона. Благодаря сильному взаимодействию происходит образование адронов (например, нуклонов, из которых состоит атомное ядро) из кварков. Это взаимодействие осуществляется с помощью глюона. Глюон - векторный калибровочный безмассовый бозон. Выделяют 8 независимых типов глюонов, отличающихся цветом.

1.2 Кваркони

Упомянутые ранее адроны принято делить на два типа: барионы и мезоны. Отличаются они барионным числом, которое определяет количество кварков и антикварков, входящих в состав частицы. Так, если барионное число оказывается равным нулю, то данный адрон именуют мезоном. По определению барионного числа $B = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3}$, где N_q - количество кварков в адроне, а $N_{\bar{q}}$ - число антикварков. Очевидно тогда, что для мезонов общее число кварков, входящих в его состав, равно числу соответствующих антикварков.

Характеристики мезона (массы и квантовые числа) определяются массами кварков и антикварков в их составе и их квантовыми числами. Т.к. в поколениях кварков массы данных частиц сильно отличаются, то и значения масс мезонов лежат в широких пределах.

Кваркониями называют мезоны, состоящие из кварка и антикварка одного аромата. Наибольший интерес для современной физики высоких энергий представляют тяжелые кварконии. Так называют мезоны, состоящие из пары кварк-антикварк: c и \bar{c} - так называемые чармонии, а также боттомонии, состоящие из b и \bar{b} -кварков.

Кварконии могут находиться в разных состояниях, зависящих от их спина и орбитального момента (рис. 3). Самым известным является состояние чармония 1^3S_1 , которое было открыто первым. Это состояние, следуя тому, как назвали его при открытии, именуют J/ψ -мезон. В данной же работе рассматривается основное состояние чармония 1^1S_0 : η_c -мезон. [9]

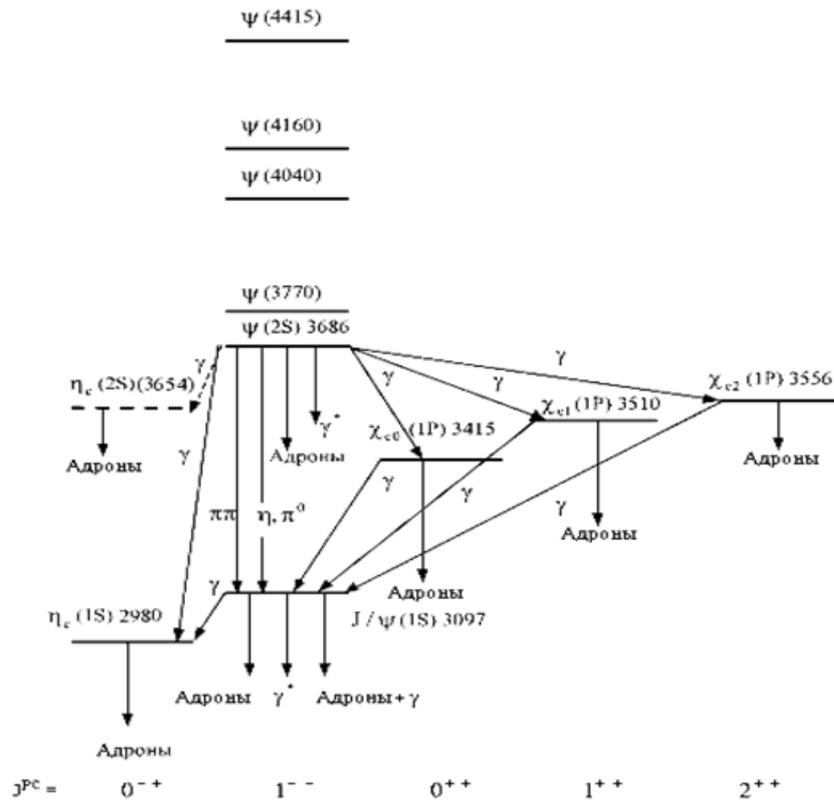


Рис. 3: Система энергетических уровней чармония

1.3 Квантовая хромодинамика

Квантовая хромодинамика (КХД) - часть СМ, которая описывает процессы сильного взаимодействия. Толчком к появлению КХД послужило создание кварковой модели адронов, которые удалось сгруппировать в семейства и расположить в виде мультиплетов (например, октетов, как на рис. 4), которые соответствуют представлению группы SU(3). Теория была построена по аналогии с КЭД, выведенной из требования локальной калибровочной инвариантности электромагнитного поля и построенной на группе U(1). В рамках КЭД электромагнитное взаимодействие осуществляется через испускание и поглощение заряженными частицами фотонов. Похожим образом в КХД осуществляется сильное взаимодействие – с помощью обмена глюонами. [10].

Кратко можно сформулировать основные идеи КХД:

1. Как было сказано ранее, вводится два новых квантовых числа, которыми обладают кварки – аромат и цвет. Различают красный (Red), зеленый (Green) и синий (Blue) цвета (имеют место и их антицвета, т.к. цвет - один из трех зарядов в КХД наравне с электрическим и изоспиновым) и шесть ароматов (по которым кварки и распределяются на шесть типов), сохраняющихся при сильном взаимодействии частиц.
2. Взаимодействие между кварками осуществляется с помощью восьми типов нейтральных глюонов, имеющих ненулевой цвет, а потому прямо участвующими во взаимодействии. Возможно 8 цветовых комбинаций в соответствии с размерностью присоединенного представления группы SU(3): $R\bar{G}$, $R\bar{B}$, $G\bar{R}$, $G\bar{B}$, $B\bar{R}$, $B\bar{G}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}(R\bar{R}-G\bar{G})$, $\sqrt{\frac{1}{6}}(R\bar{R}+G\bar{G}-2B\bar{B})$.

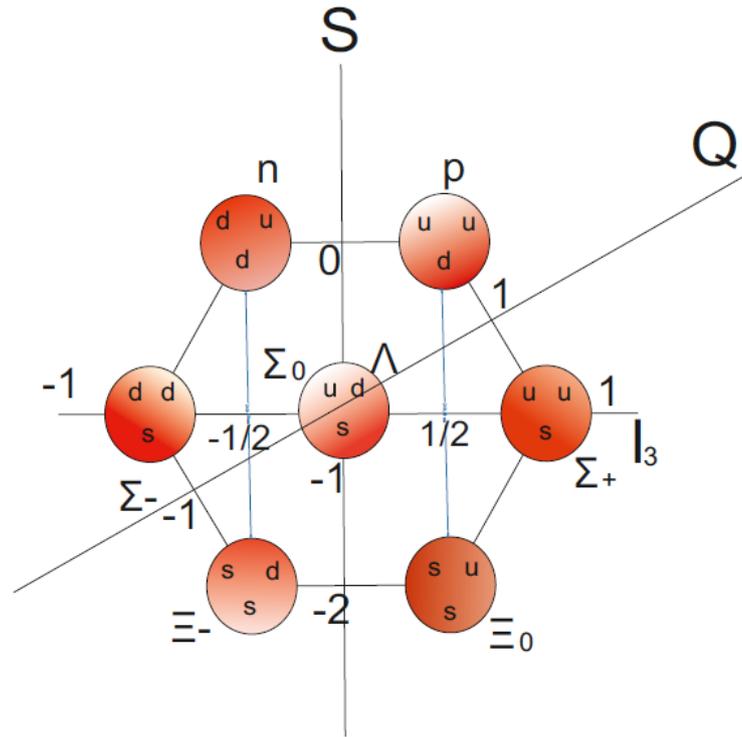


Рис. 4: Октет барионов

3. КХД – неабелева калибровочная теория, построенная на группе $SU(3)$. Её лагранжиан представляет собой лагранжиан поля свободных кварков с восстановленной локальной калибровочной симметрией и слагаемым свободного глюонного поля. Явный вид лагранжиана КХД [10].

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_i \bar{\psi}_{i,f} (i(\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu)_{ij} - m_f \delta_{ij}) \psi_{j,f} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (1)$$

В этой формуле $\psi_i^f(x)$ - поле кварков с цветом i и ароматом f , γ^μ - матрицы Дирака, $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}$ - удлиненная производная, $G_{\mu\nu}^a$ - тензор глюонного поля, аналог тензора Максвелла в КЭД, явно задающийся в виде $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. Были использованы A_μ^a - векторы напряженности глюонных полей, индекс a - их цвета, g_s - константа связи, а f^{abc} - структурная константа группы $SU(3)$.

4. Константа сильного взаимодействия зависит от энергетического масштаба $\alpha_s(\mu_R^2)$, поэтому ее называют бегущей. Таким образом она позволяет учесть изменение интенсивности взаимодействия на разных расстояниях, приводящих к двум знаковым явлениям: конфайнменту (ненаблюдению кварков в свободном состоянии), соответствующему большому значению α_s на больших расстояниях и асимптотической свободе (бесконечно малое взаимодействие между кварками на малых расстояниях), которая наступает при малой константе взаимодействия.
5. Известно также [10], что константа взаимодействия подчиняется уравнению ренормгруп-

пы

$$\frac{d\alpha_s(\mu_R^2)}{d\ln(\frac{\mu_R^2}{\mu^2})} = \beta(\alpha_s) \quad (2)$$

где в первом порядке разложения в ряд теории возмущений по степеням константы связи функция

$$\beta(\alpha_s) = -\frac{(33 - 2f)\alpha_s(\mu_R^2)}{12\pi}$$

Задав начальное условие $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ и зафиксировав масштаб перенормировки

$$\frac{(33 - 2f)\alpha_s}{12\pi} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} = 1$$

(Λ - фундаментальная константа КХД), можно получить выражение для бегущей константы сильного взаимодействия:

$$\alpha_s(\mu_R^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2f)\ln \frac{\mu_R^2}{\Lambda^2}} \quad (3)$$

1.4 Партонная модель

Партонная модель была предложена в 1969 году Ричардом Фейнманом. [10] Первоначально с помощью нее анализировались столкновения протонов на больших энергиях. Адроны представлялись в виде "облака состоящего из множества частиц - партонов. В таком случае при взаимодействии структура адрона разрушается, а частицы, ранее состоящие в "облаке адронизируются и образуют составные частицы конечного состояния. С развитием квантовой хромодинамики, изучением явления конфайнмента и асимптотической свободы, а также развитием кварковой модели в физике элементарных частиц стало ясно, что кварки, на данный момент являющиеся мельчайшими бесструктурными частицами, и глюоны - калибровочные бозоны сильного взаимодействия, не существуют в свободном состоянии (по крайней мере, экспериментально отдельный свободный глюон или кварк наблюдать не получается). По этой причине партоны отождествляют с кварками, антикварками и глюонами.

Математически ключевой теоремой в партонной модели является теорема о факторизации (представлении определенных величин в виде множителей или свертки).

Основные факторизации:

1. КПМ - Коллинеарная партонная модель [11], самая простая, не учитывающая величину поперечного импульса партона
2. ОПМ - Обобщенная партонная модель [12] учитывает поперечные импульсы
3. Подход k_T -факторизации [13], используемый при сверхвысоких энергиях

Выбор факторизации зависит от соотношения между жестким масштабом процесса и поперечным импульсом искомой конечной частицы: 1) $q_T \ll M$ для КПМ, 2) $q_T \gg M$ для ОПМ, 3) $q_T = M \ll \sqrt{S}$.

2 Коллинеарная партонная модель

Наиболее простой является коллинеарная факторизация, служащая основой коллинеарной партонной модели (КПМ). В ней предполагается, что кварки, входящие в состав протона несут долю его импульса

$$q^\mu = xP^\mu \quad (4)$$

x - переменная, выражающая долю импульса протона, приходящуюся на партон.

Для описания партонных процессов используется теорема о факторизации [14], которая гласит, что дифференциальное сечение процесса высоких энергий можно представить в виде свертки партонных функций распределения сталкивающихся адронов с партонными сечениями жестких подпроцессов. Явный вид формулы факторизации приведен ниже:

$$d\sigma(pp \rightarrow kX) = \sum_{i,j,l=q,\bar{q},g} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_i(x_1, \mu) f_j(x_2, \mu) d\hat{\sigma}(ij \rightarrow kl) \quad (5)$$

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \frac{|\bar{M}|^2}{I} \frac{d^3q_3}{(2\pi)^3 2q_{30}} \frac{d^3q_4}{(2\pi)^3 2q_{40}} \quad (6)$$

Суммирование по i, j подразумевает суммирование по всем кваркам, антикваркам и глюонам, x_1, x_2 - доли импульсов начальных партонов, $f_i(x, \mu)$ - партонные функции распределения, о которых речь пойдет далее, $d\hat{\sigma}$ - дифференциальное сечение партонного подпроцесса, $|\bar{M}|^2$ - квадрат амплитуды подпроцесса, вычисляемый по правилам квантовой теории поля, а I - плотность потока сталкивающихся партонов, вычисляющаяся по формуле:

$$I = 4\sqrt{(q_1 q_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = 4(q_1, q_2) = 2\hat{s}$$

при $m_1 = m_2 = 0$.

2.1 Партонные функции распределения в КПМ

Во всех приведенных формулах функции вида $f_i(x, \mu)$ - это так называемые партонные функции распределения (ПФР). По физическому смыслу это функция распределения по доле импульсов, т.е. вероятность найти у партона долю импульса x .

Извлекают ПФР, исследуя различные жесткие процессы, например, рождение прямых фотонов, процесс Дрелла-Яна (рассеяние адронов высоких энергий, при котором кварк и антикварк от разных адронов аннигилируют, рождается пара противоположно заряженных лептонов с большой инвариантной массой), глубоконеупругое рассеяние (ГНР) нейтрино или лептонов (рис. 5).

Дифференциальное сечение ГНР лептонов зависит от формфакторов $F_i(x, Q^2)$, называемых структурными функциями [15]:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{8\pi\alpha^2 ME}{Q^4} \left[\left(\frac{1 + (1-y)^2}{2} \right) 2xF_1 + (1-y)(F_2 - 2xF_1) - \left(\frac{M}{2E} xy F_2 \right) \right]$$

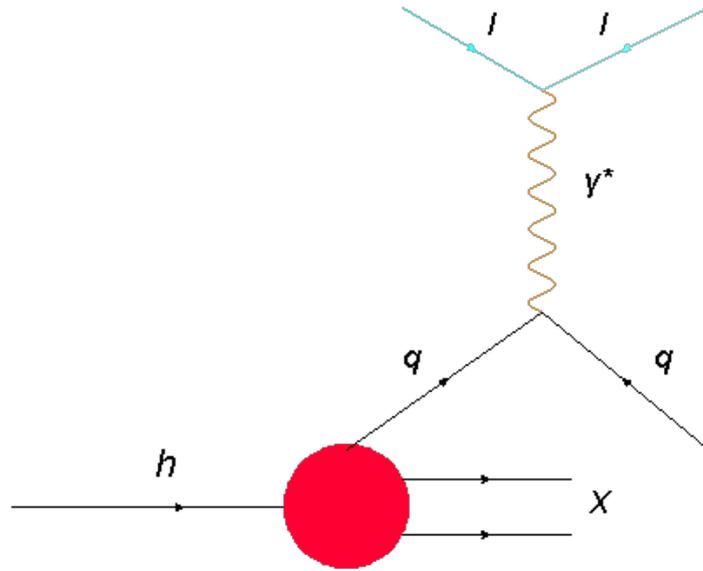


Рис. 5: Глубоконеупругое рассеяние лептонов на адроне

Здесь $Q^2 = -q^2$ - квадрат переданного импульса с обратным знаком, M - масса протона, на котором происходит рассеяние, x - переменная Бёркена

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

где под ν подразумевается скалярное произведение импульсов протона и переданного импульса

$$\nu = (p, q) = M(E - E')$$

E и E' - начальные и конечные энергии лептона в системе покоя протона-мишени.

Буквой y обозначается величина (в формуле k - импульс рассеивающегося лептона):

$$y = \frac{(q, p)}{(k, p)} = 1 - \frac{E'}{E}$$

В КПМ F_1 и F_2 связаны соотношением:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x f_q(x) \quad (7)$$

Однако для получения информации о глюонных ПФР необходимо рассмотреть более высокий порядок в теории возмущений из-за малости сечения взаимодействия глюона с виртуальным фотоном, что приводит к возможности испускания глюонов кварками и зависимости структурных функций (а значит и ПФР) от квадрата переданного импульса.

По причине отсутствия глюонных ПФР в лидирующем порядке теории возмущений на данный момент точность измерения кварковых ПФР выше. Проблема уточнения глюонных ПФР по-прежнему актуальна.

Свойства ПФР определяются свойствами структурных функций, из которых они получаются. Например, есть несколько правил сумм для структурных функций [16].

Правило сумм Гросса-Ллевелин-Смита определяет число валентных кварков в протоне [17]

$$\frac{1}{2} \int_0^1 dx (xF_3^{\nu p}(x) + xF_3^{\bar{\nu} p}(x)) = 3 \quad (8)$$

где F_3 , дополнительная структурная функция, возникающая в партонной партонной модели для рассеяния нейтрино и антинейтрино на протоне

Можно найти правило сумм и для, например, F_2 :

$$\int_0^1 dx (F_2^{\nu p}(x) + F_2^{\bar{\nu} p}(x)) = 0.5 \quad (9)$$

Для кварковых ПФР есть два типа правил сумм - по ароматам и по моментам.

Правило сумм по ароматам записывается для распределений валентных кварков (разности распределений для кварка и его антикварка)

$$f_q^{\text{Вал}}(x, \mu) = f_q(x, \mu) - f_{\bar{q}}(x, \mu)$$

и для разных типов легких кварков дает:

$$\int_0^1 dx (f_u^{\text{Вал}}(x, \mu)) = 2 \quad (10)$$

$$\int_0^1 dx (f_d^{\text{Вал}}(x, \mu)) = 1 \quad (11)$$

$$\int_0^1 dx (f_s^{\text{Вал}}(x, \mu)) = 0 \quad (12)$$

Правило сумм для моментов является общим правилом для кварковых ПФР:

$$\sum_q \int_0^1 dx x f_q(x, \mu) = 1 \quad (13)$$

где проводится суммирование по всем ароматам.

Зависимость ПФР от масштаба μ определяется уравнениями Докшитцера-Грибова-Липатова-Алтарелли-Паризи (ДГЛАП) [18].

$$\frac{d}{d \ln(\frac{Q^2}{\mu^2})} f_q(x, \mu) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q(y, \mu) P_{qq}(\frac{x}{y}) \quad (14)$$

Уравнение выражает тот факт, что кварк с долей импульса x (левая часть равенства) может родиться из кварка с долей импульса y (правая часть), испустив глюон - вероятность такого

события определяется функцией P_{qq} , которая равна

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z)$$

где $(1-z)_+$ функция, которая задается таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$\int_0^1 \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 \frac{f(z) - f(1)}{(1-z)}$$

В данной работе для применения ПФР в численных расчетах используется библиотека MSTW 2008 [19].

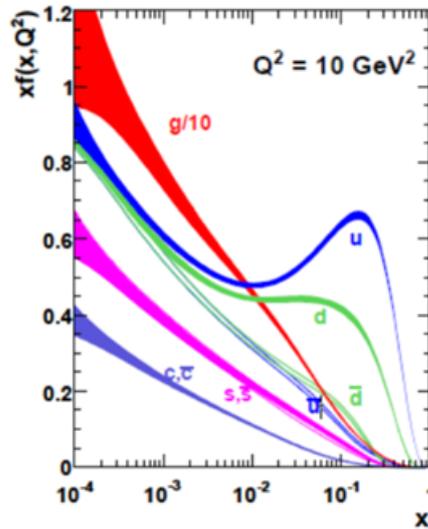


Рис. 6: Поведение партонных функций по предсказаниям библиотеки MSTW2008

2.2 Кинематика для процесса 2 в 2 в КПМ

Удобно перейти в систему центра масс (СЦМ) протонов. В таком случае импульсы летящих протонов равны по модулю и противоположны по направлению:

$$P_1 = \frac{\sqrt{S}}{2}(1, 0, 0, 1) \quad (15)$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{S}}{2}(1, 0, 0, -1) \quad (16)$$

Квадрат инвариантной энергии (энергии СЦМ):

$$S = (P_1 + P_2)^2 = 2P_1 P_2$$

при $P_1^2 = 0$ и $P_2^2 = 0$.

Можно написать фазовый элемент объема, введя поперечную q_{3T} и продольную составляющую импульса q_{3z} при наличии азимутальной симметрии:

$$d^3 q_3 = \int_0^{2\pi} d\phi q_{3T} dq_{3T} dq_{3z} = 2\pi q_{3T} dq_{3T} dq_{3z}$$

Для удобства вводится новая величина - быстрота: $y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E_3 + p_{3z}}{E_3 - p_{3z}}\right)$, где $E_3 = q_{30}$. Тогда можно получить.

$$d^3 q_3 = q_{30} \pi dq_{3T}^2 dy_3$$

Далее введя поперечную массу $m_{3T}^2 = m_3^2 + q_{3T}^2$ и новые инварианты с помощью выражений:

$$q_{30} + q_{3z} = m_{3T} e^{y_3} \quad (17)$$

$$q_{30} - q_{3z} = m_{3T} e^{-y_3} \quad (18)$$

Получим так называемые переменные Мандельстама - кинематические переменные, являющиеся кинематическими инвариантами [20]:

$$\hat{s} = (q_1 + q_2)^2 = x_1 x_2 S \quad (19)$$

$$\hat{t} = (q_1 - q_3)^2 = m^2 - x_1 \sqrt{S} m_{3T} e^{-y_3} \quad (20)$$

$$\hat{u} = (q_1 - q_4)^2 = m^2 - x_2 \sqrt{S} m_{3T} e^{y_3} \quad (21)$$

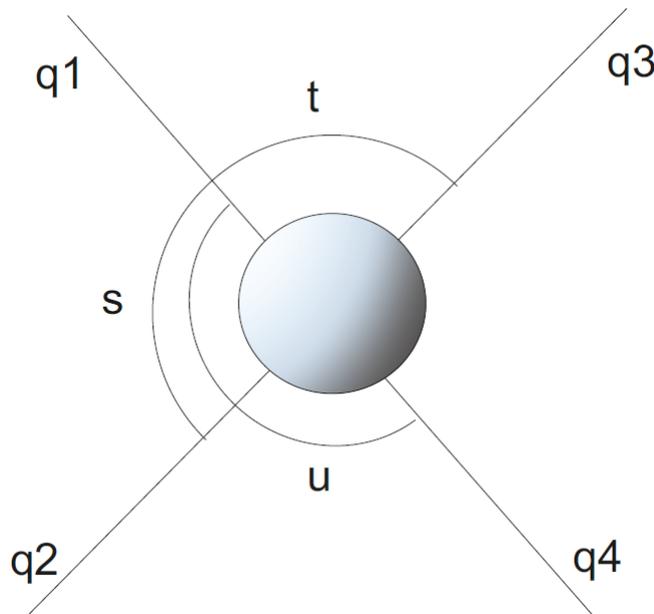


Рис. 7: Переменные Мандельстама и их связь с импульсами партонов

Подставив $d\hat{\sigma}$ (6) в формулу КПМ (5), можно получить спектр по быстроте, поперечному

импульсу, его квадрату или по их комбинациям, например:

$$\frac{d\sigma}{dq_{3T}^2 dy_3} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_g(x_1, \mu^2) f_g(x_2, \mu^2) \frac{|M|^2}{16\pi\hat{s}} \delta(\hat{s} + \hat{u} + \hat{t} - m^2), \quad (22)$$

перемещая в правую часть dq_{3T}^2 или dy_3 и интегрируя по ним, можно получать отдельные спектры по одной из этих величин.

Подставляя инварианты, можно найти, что

$$\delta(\hat{s} + \hat{u} + \hat{t} - m^2) = \delta\left((x_1 S - \sqrt{S} m_T e^{y_3})(x_2 - \frac{x_1 \sqrt{S} m_T e^{-y_3} - m^2}{x_1 S - \sqrt{S} m_T e^{y_3}})\right) \quad (23)$$

Далее, снимая интегрирование по x_2 с помощью дельта-функции (аналогичный процесс можно проделать и с x_1), можно получить спектр лишь по поперечному импульсу.

$$\frac{d\sigma}{dq_{3T}^2} = q_{3T} \int dy_3 \int_{x_{min}}^1 dx_1 f_g(x_1, \mu^2) f_g(x_2, \mu^2) \frac{|M|^2}{8\pi x_1 \tilde{x}_2} \frac{1}{|x_1 s - \sqrt{s} m_{3t} e^{y_3}|}, \quad (24)$$

где

$$\tilde{x}_2 = \frac{x_1 \sqrt{s} m_T e^{-y_3} - m^2}{x_1 s - \sqrt{s} m_T e^{y_3}}$$

$$x_{min} = \frac{\sqrt{s} m_T e^{y_3} - m^2}{s - \sqrt{s} m_T e^{-y_3}}$$

3 Обобщенная партонная модель

В обобщенной партонной модели вводится зависимость от поперечного импульса. Для выполнения требования $q^2 = 0$ 4-импульс представляется в виде:

$$\begin{cases} q_1^\mu = x_1 P_1^\mu + y_1 P_2^\mu + q_{T1}^\mu \\ q_2^\mu = x_2 P_2^\mu + y_2 P_1^\mu + q_{T2}^\mu \\ q_1^2 = 0 \\ q_2^2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

y_1 и y_2 определяются из третьего и четвертого уравнения. Тогда с учетом $(P_1 \cdot P_2) = \frac{s}{2}$ покомпонентно можно получить (явный вид импульсов протонов в СЦМ по-прежнему задается формулами (13,14)):

$$\begin{aligned}
q_{10} &= x_1 \frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{q_{1t}^2}{2\sqrt{s}x_1} \\
q_{1z} &= x_1 \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{q_{1t}^2}{2\sqrt{s}x_1} \\
q_{20} &= x_2 \frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{q_{2t}^2}{2\sqrt{s}x_2} \\
q_{2z} &= -x_2 \frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{q_{2t}^2}{2\sqrt{s}x_2}
\end{aligned}$$

На основе этого подхода построена обобщенная партонная модель (ОПМ) [21]. В теореме о факторизации ОПМ необходимо учитывать поперечные импульсы начальных партонной: q_{1T} и q_{2T} .

$$d\sigma = \int_0^1 dx_1 \int d^2 q_{1T} \int_0^1 dx_2 \int d^2 q_{2T} F(x_1, q_{1T}, \mu) F(x_2, q_{2T}, \mu) d\hat{\sigma} \quad (26)$$

Сечение подпроцесса $d\hat{\sigma}$ совпадает с таковым в КПМ, которое задается формулой (6).

В данной формуле используются ПФР, зависящие от поперечного импульса [22]. Они получаются путем умножения обычных ПФР на распределение по поперечному импульсу

$$F(x, q_T, \mu) = f(x, \mu)G(q_T) \quad (27)$$

В качестве $G(q_T)$ обычно выбирается гауссово распределение:

$$G(q_T) = \frac{e^{-\frac{q_T^2}{\langle q_T^2 \rangle}}}{\pi \langle q_T^2 \rangle} \quad (28)$$

Параметр $\langle q_T^2 \rangle$, выступающий аналогом дисперсии распределения Гаусса, зависит от энергий столкновения и вычисляется полуэмпирически на основе экспериментальных данных [23].

3.1 Кинематика для процесса 2 в 2 в ОПМ

Аналогично КПМ можно найти переменные Мандельстама

$$\hat{s} = x_1 x_2 S - 2|q_{1T}||q_{2T}|\cos(\phi_2) + \frac{q_{1T}^2 q_{2T}^2}{x_1 x_2 S} \quad (29)$$

$$\hat{t} = m^2 + 2|q_{1T}||q_{3T}|\cos(\phi_3) - \sqrt{S}m_{3T}x_1 e^{-y_3} - \frac{q_{1T}^2 m_{3T} e^{y_3}}{\sqrt{S}x_1} \quad (30)$$

$$\hat{u} = m^2 + 2|q_{2T}||q_{3T}|\cos(\phi) - \sqrt{S}m_{3T}x_2e^{y_3} - \frac{q_{2T}^2m_{3T}e^{-y_3}}{\sqrt{S}x_2} \quad (31)$$

Упрощая формулу сечения в ОПМ, можно получить:

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma} &= (2\pi)^4 \int \delta(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \frac{|\overline{M}|^2}{2x_1x_2S} \frac{d^3q_3}{(2\pi)^3 2q_3^0} \frac{d^4q_4}{(2\pi)^3} \delta_+(q_4^2) = \\ &= \int \delta_+(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} - m^2) \frac{|\overline{M}|^2}{2x_1x_2S} \frac{d^3q_3}{(2\pi)^2 2q_3^0} \end{aligned}$$

Выразим аргумент δ -функции:

$$\begin{aligned} \delta(f(x_1, x_2, q_{1T}^2, q_{2T}^2)) &= \delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} - m^2) = \delta(x_1x_2S - 2|q_{1T}||q_{2T}|\cos(\phi_2) - \frac{q_{2T}^2m_{3T}e^{-y_3}}{\sqrt{S}x_2} + \frac{q_{1T}^2q_{2T}^2}{x_1x_2S} + \\ &+ 2|q_{1T}||q_{3T}|\cos(\phi_3) - \sqrt{S}m_{3T}x_1e^{-y_3} - \frac{q_{1T}^2m_{3T}e^{y_3}}{\sqrt{S}x_1} + 2|q_{2T}||q_{3T}|\cos(\phi) - \sqrt{S}m_{3T}x_2e^{y_3} + \\ + m^2) &= \delta\left(\frac{x_2^2(x_1^2S^2 - x_1\xi_1S^2) + x_2(m^2x_1S - x_1^2\xi_2S^2 + 2x_1Sa - S\xi_1q_{1T}^2) - Sx_1\xi_2q_{2T}^2 + q_{1T}^2q_{2T}^2}{x_1x_2S}\right) \end{aligned}$$

Здесь было введено $((q_{1T}q_{3T}) - (q_{1T}q_{2T}) + (q_{2T}q_{3T})) = a$ и $\xi_1 = \frac{m_{3T}e^y}{\sqrt{S}}$, $\xi_2 = \frac{m_{3T}e^{-y}}{\sqrt{S}}$ ($\xi_1\xi_2S = m_{3T}^2$).

Снимем интеграл по x_2 с помощью дельта-функции, распишем дифференциалы

$$d^2q_{1T} = dq_{1T}q_{1T}d\phi_1$$

$$d^2q_{2T} = dq_{2T}q_{2T}d\phi_2$$

$$\frac{d^3q_3}{2q_{30}} = \frac{d\phi_3q_{3T}dq_{3T}dq_{3z}}{2q_{30}} = \frac{1}{2}q_{3T}d\phi_3dy_3dq_{3T}$$

Сразу проинтегрируем по ϕ_1 , тогда итоговая формула:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{8\pi} \int_0^1 dx_1 \int_0^\infty dq_{1T} \int_0^\infty dq_{2T} \int_0^{2\pi} d\phi_2 F(x_1, |q_{1T}|^2, \mu) F(\tilde{x}_2, |q_{2T}|^2, \mu) \times \\ &\times \int \frac{|\overline{M}|^2}{x_1\tilde{x}_2S} \frac{q_{1T}q_{2T}q_{3T}\theta(1-\tilde{x}_2)\theta(\tilde{x}_2)}{|f'(x_1, \tilde{x}_2, q_{1T}^2, q_{2T}^2)|} d\phi_3 dy_3 dq_{3T} \quad (32) \end{aligned}$$

Здесь $f'(x_1, \tilde{x}_2, q_{1T}^2, q_{2T}^2) = -((q_{1T}^2q_{2T}^2)/(Sx_1\tilde{x}_2^2)) + S(x_1 - \xi_1) + (q_{2T}^2\xi_2)/\tilde{x}_2^2$

3.2 Кинематика процесса 2 в 1 в ОПМ

Для процесса 2 в 1 вычисления упрощаются за счет более простого закона сохранения 4-импульса $q_1 + q_2 = q_3$.

Сечение для подпроцесса 2 в 1 отличается от (26) фазовым объемом и 4-дельта-функцией, которые не содержат импульс четвертой частицы:

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q_3) \frac{|\overline{M}|^2}{2x_1 x_2 S} \frac{d^3 q_3}{(2\pi)^3 2q_3^0} \quad (33)$$

При упрощении:

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta(q_1 + q_2 - q_3) \frac{|\overline{M}|^2}{2x_1 x_2 S} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^3} \delta_+(q_3^2 - m^2) = 2\pi \delta_+(\hat{s} - m^2) \frac{|\overline{M}|^2}{2x_1 x_2 S}$$

Здесь буквой \hat{s} формально названо выражение $(q_1 + q_2)^2$.

Тогда

$$\hat{s} = x_1 x_2 S + \frac{q_{1T}^2 q_{2T}^2}{x_1 x_2 S} - 2|q_{1T}| |q_{3T}| \cos(\phi_1) + 2q_{1T}^2 \quad (34)$$

Выразим аргумент δ -функции:

$$\begin{aligned} \delta(f(x_1, x_2, q_{1T}, q_{2T}, q_{3T})) &= \delta(\hat{s} - m^2) = \delta(x_1 x_2 S - 2|q_{1T}| |q_{3T}| \cos(\phi_3) + 2q_{1T}^2 - m^2 + \frac{q_{1T}^2 q_{2T}^2}{x_1 x_2 S}) = \\ &= \delta\left(\frac{x_2^2(x_1^2 S^2) + x_2(2q_{1T}^2 x_1 S - m^2 x_1 S - 2|q_{1T}| |q_{3T}| \cos(\phi_3) x_1 S) + q_{1T}^2 q_{2T}^2}{x_1 x_2 S}\right) \end{aligned}$$

Снимем интеграл по x_2 с помощью дельта-функции, распишем дифференциалы $d^2 q_{1T} = dq_{1T} q_{1T} \phi_1$, $d^2 q_{3T} = dq_{3T} q_{3T} \phi_3$ и сразу проинтегрируем по ϕ_1 :

$$d\sigma = 2\pi^2 \int_0^1 dx_1 \int dq_{1T} \int dq_{3T} \int d\phi_3 F(x_1, q_{1T}, \mu) F(\tilde{x}_2, q_{3T} - q_{1T}, \mu) \frac{|\overline{M}|^2}{x_1 \tilde{x}_2 S} \frac{q_{1T} q_{3T} \theta(1 - \tilde{x}_2) \theta(\tilde{x}_2)}{|f'(x_1, \tilde{x}_2, q_{1T}, q_{3T})|} \quad (35)$$

Здесь введена производная от аргумента дельта-функции

$$f'(x_1, \tilde{x}_2, q_{1T}, q_{3T}) = S x_1 - \frac{q_{1T}^2 * (q_{1T} - q_{3T})^2}{S x_1 \tilde{x}_2^2}$$

4 Рождение η_c -мезонов в партонной модели

4.1 Модели адронизации

В данной работе применяется МЦС (модель цветных синглетов) [24], в которой считается, что:

1. Пара тяжелых кварков возникает в результате партонных столкновений при нулевом относительном импульсе.
2. Квантовые числа (спин и цвет) такие же, как и у физического конечного состояния.
3. Вероятность образования связана с радиальной волновой функцией в нуле $R(0)$.

Среди моделей адронизации существует МИЦ (модель испарения цвета) [25], в которой принимается, что

1. Пара тяжелых кварков возникает в результате партонных столкновений с инвариантной массой, меньшей порога рождения D -мезонов.
2. Все возможные состояния могут эволюционировать до заданного кваркония независимо от цвета/спина.
3. Вероятность образования универсальна и специфична только для состояния кваркония.

Интерес представляет и подход нерелятивистской КХД (НРКХД) [26], в которой различные цветовые и спиновые состояния фрагментируются с разной вероятностью - матричные элементы больших расстояний (LDME). НРКХД включает МЦС и МИЦ в качестве особых случаев.

4.2 Квадраты амплитуд для процессов рождения η_c -мезона

При расчетах в КПМ в модели МЦС использовался известный квадрат матричного элемента для рождения η_c -мезона [27]

$$|\bar{M}^2|_{g+g \rightarrow \eta_c+g} = 16\pi\hat{s}^2 \frac{\pi\alpha_s^3 R(0)^2}{8M\hat{s}^2} \left(\frac{M^4 - \hat{s}^2 - \hat{t}^2 - \hat{u}^2}{(\hat{s} - M^2)(\hat{t} - M^2)(\hat{u} - M^2)} \right) \frac{M^8 + \hat{s}^4 + \hat{t}^4 + \hat{u}^4}{\hat{s}\hat{t}\hat{u}} \quad (36)$$

Здесь $R(0)^2$ - значение радиальной волновой функции в нуле [28].

$$R(0)^2 = \frac{M^2 \Gamma(^3S_1 \rightarrow e^+ e^-)}{\alpha^2 e_q^2}$$

Квадрат матричного элемента для рождения η_c -мезона в процессе 2 в 1 для расчетов в ОПМ также известен [29]:

$$|\bar{M}^2|_{g+g \rightarrow \eta_c} = \frac{5}{12} \pi^2 \alpha_s^2 \frac{24\pi |R(0)|^2}{M} \quad (37)$$

4.3 Результаты расчетов

Для расчета многомерных интегралов, входящих в сечение рассеяния, используются методы интегрирования [30], основанные на методе Монте-Карло. [31]

Численные расчеты для данной работы проводились с помощью библиотеки CUBA. [32] Данная библиотека предлагает на выбор четыре независимые процедуры для многомерного численного интегрирования: Vegas, Suave, Divonne и Cuhre.

С учетом вышесказанного для заданных целей была разработана программа на языке Fortran с использованием интегратора Suave, использующего метод Монте-Карло в качестве базового метода. Информацию о нем можно увидеть в таблице 3.

Таблица 3: Информация о процедурах многомерного интегрирования

Процедура	Основной метод интегрирования	Тип алгоритма	Уменьшение дисперсии
Vegas	Квазислучайный генератор Соболя или псевдослучайный генератор Мерсенна-Твистера или псевдослучайный генератор Ranlux	Монте-Карло Монте-Карло Монте-Карло	Выборка по значимости
Suave	Квазислучайный генератор Соболя или псевдослучайный генератор Мерсенна-Твистера или псевдослучайный генератор Ranlux	Монте-Карло Монте-Карло Монте-Карло	Глобальное адаптивное подразбиение + выборка по значимости
Divonne	Квазислучайный генератор Коробова или квазислучайный генератор Соболя или псевдослучайный генератор Мерсенна-Твистера или псевдослучайный генератор Ranlux или интегрирование в квадратурах	Монте-Карло Монте-Карло Монте-Карло Монте-Карло детерминированный	Стратифицированная выборка с помощью методов численной оптимизации
Cuhre	интегрирование в квадратурах	детерминированный	Глобальное адаптивное подразбиение

Для получения результатов с помощью этой программы использовался метод, в котором дифференциальное сечение, отнесенное к дифференциалу какой-либо переменной, например, поперечному импульсу 3-ей частицы q_{3T} , отождествляется с отношением разности значений сечения, заключенных в некотором интервале поперечных импульсов (т.н. бине) к величине этого интервала, т.е. в данном случае

$$\frac{d\sigma}{dq_{3T}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta q_{3T}}$$

Здесь

$$\Delta q_{3T} = q_{3T(Max_i)} - q_{3T(Min_i)} \quad (38)$$

$q_{3T(Max_i)}$, $q_{3T(Min_i)}$ - границы i -го бина.

В КПМ было рассчитано дифференциальное сечение инклюзивного рождения η_c -мезона.

При проведении расчетов масштаб μ выбирался в виде $\mu = \xi \sqrt{k_T^2 + M^2}$, где константа ξ варьируется между $\xi = \frac{1}{2}$ и $\xi = 2$ относительно его значения по умолчанию $\xi = 1$ для оценки теоретической неопределенности из-за свободы выбора масштабов. Результирующие ошибки в роли ”коридора погрешности” представлены в виде серой области на графиках.

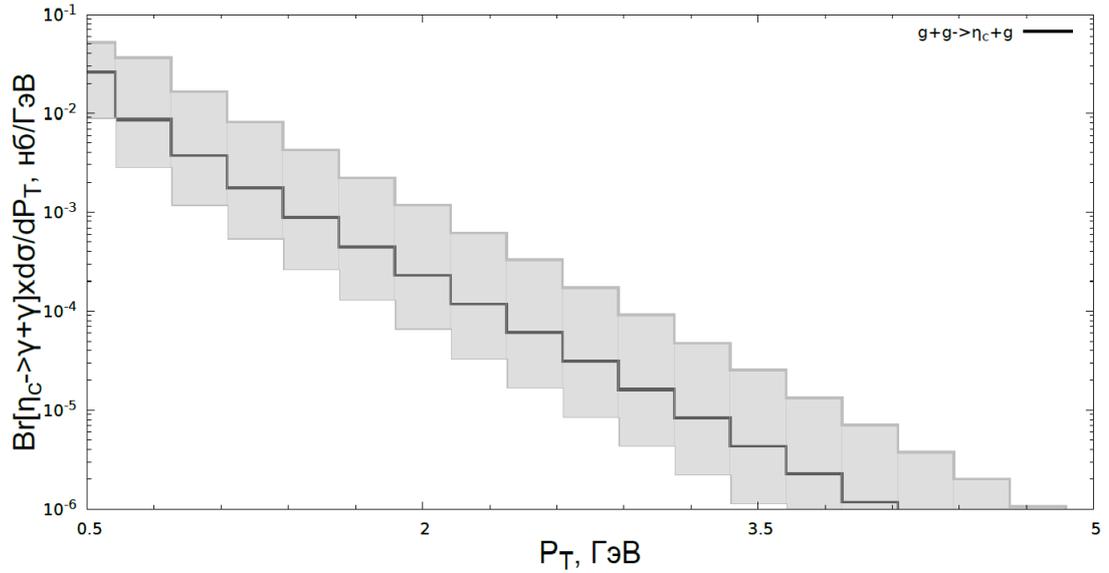


Рис. 8: Дифференциальное сечение по поперечным импульсам $\frac{d\sigma}{dp_T}$ для η_c -мезона в КПМ, $|y| < 2.2$, $0.5 < p_T < 6$ [ГэВ]

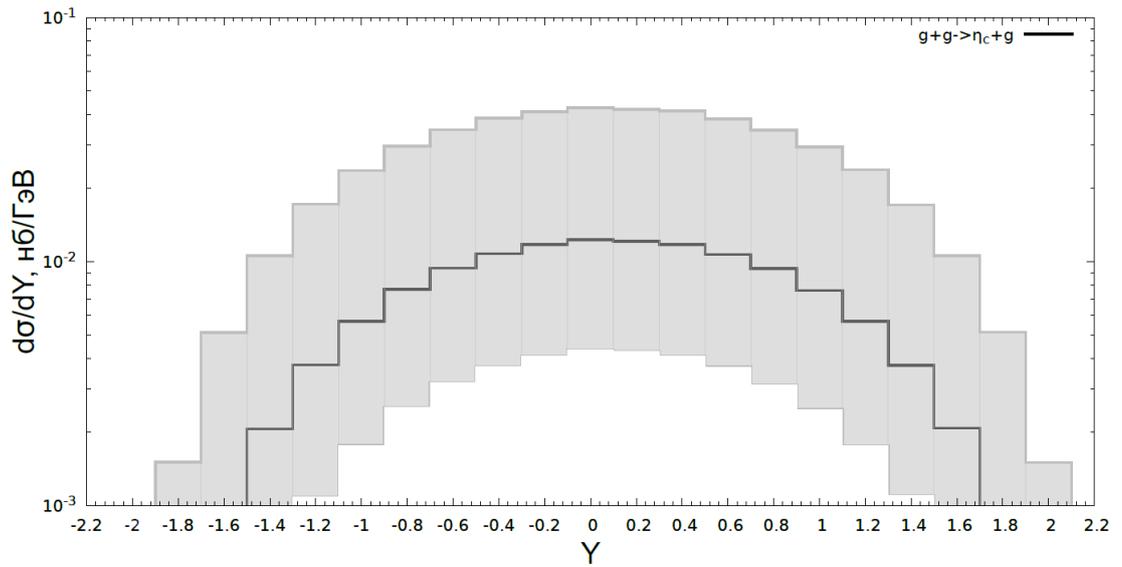


Рис. 9: Дифференциальное сечение по быстроте $\frac{d\sigma}{dy}$ для η_c -мезонов в КПМ

В КПМ при рождении η_c -мезона испускался дополнительный глюон, несущий поперечный импульс, т.к. сумма поперечных импульсов начальных глюонов равна нулю.

В ОПМ не испускается дополнительный глюон, т.к. теперь для начальных глюонов заданы поперечные импульсы и процесс рождения имеет только одну конечную частицу - η_c -мезон, поэтому в ОПМ рассчитывался процесс $2 \text{ в } 1 \text{ } g + g \rightarrow \eta_c$.

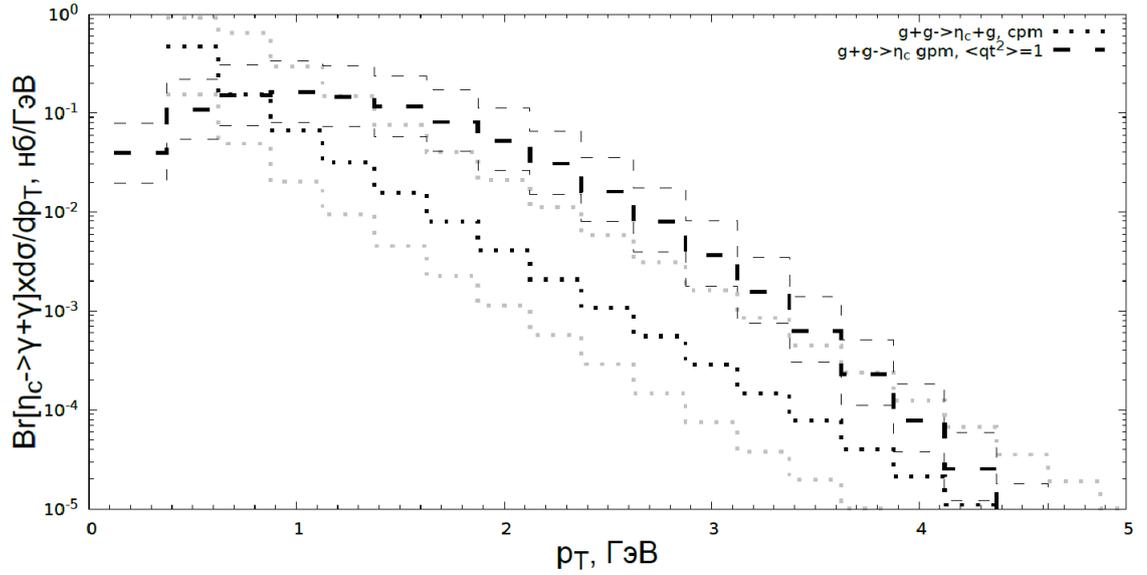


Рис. 10: Сравнение дифференциальных сечений по поперечным импульсам $\frac{d\sigma}{dp_T}$ для η_c -мезона в КПМ и ОПМ, $|y| < 3$, $0 < p_T < 6$ [ГэВ]

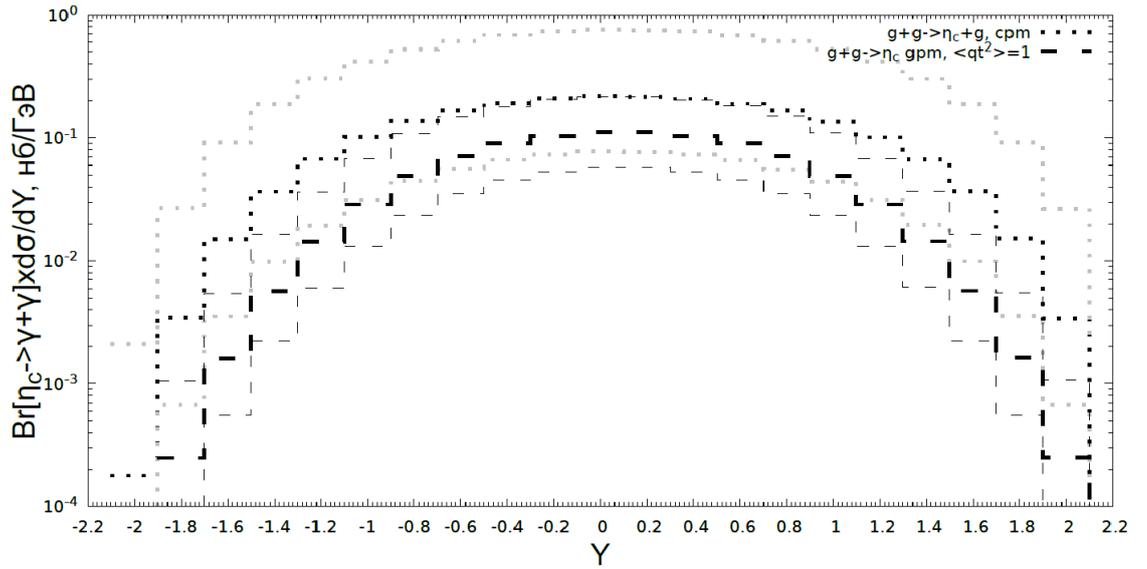


Рис. 11: Сравнение дифференциальных сечений по быстрой $\frac{d\sigma}{dy}$ для η_c -мезона в КПМ и ОПМ

На рисунках 8-11 дифференциальное сечение рождения η_c -мезона умножается на брэнчинг (относительная вероятность распада η_c -мезона по каналу с двумя конечными фотонами) $Br[\eta_c \rightarrow \gamma\gamma] = 1.8 \cdot 10^{-4}$.

5 Парное рождение фотонов в партонной модели

5.1 Фрагментационное рождение фотонов

Фрагментация - процесс, обратный распаду адрона на партоны [33]. При фрагментации происходит превращение партона в любую конечную частицу, которое, подобно распаду адрона,

описываемом с помощью интегральных сверток ПФР, записывается математически с помощью функций фрагментации (функций распада партонов [34]), которые учитываются в виде дополнительных интегралов в формуле факторизации. Для КПМ это запишется так:

$$d\sigma(pp \rightarrow mn) = \sum_{i,j,l,k=q,\bar{q},g} \int dx_1 dx_2 f_i(x_1, \mu) f_j(x_2, \mu) \int dz_3 D_{l \rightarrow m}(z_3) \int dz_4 D_{l \rightarrow n}(z_4) d\hat{\sigma}(ij \rightarrow lk) \quad (39)$$

$D_{i \rightarrow j}(z_n)$ - функции фрагментации, физический смысл которых - вероятность найти у конечной частицы долю импульса z_n фрагментированного партона. Поэтому для процесса фрагментации можно написать

$$p_C = zp_c$$

где c - фрагментированный партон, C - конечная частица.

Для функций фрагментации действует аналогичное ПФР правило сумм по ароматам

$$\sum_C \int_0^1 z D_{C/c}(z) dz = 1 \quad (40)$$

из которого по аналогии с ПФР полуэмпирическим образом можно получить их вид [35].

С учетом фрагментации могут рождаться и прямые фотоны, в таком случае конечные кварки и глюоны напрямую преобразуются в фотоны, данную ситуацию тоже необходимо учитывать. Функция фрагментации кварка в фотон:

$$D_{q \rightarrow \gamma}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} (f_a + f_b) \frac{\ln(\frac{\mu}{\Lambda})}{z} \quad (41)$$

Где введено обозначение

$$f_a = e_q^2 z^{0.049} \frac{2.2 - 1.28z + 1.29z^2}{1 - 1.63 \ln(1-z)}$$

$$f_b = 0.002(1-z)^2 z^{-1.54}$$

Функция фрагментации глюона в фотон

$$D_{g \rightarrow \gamma}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(0.0243(1-z)z^{-0.97} \right) \frac{\ln(\frac{\mu}{\Lambda})}{z} \quad (42)$$

5.2 Квадраты амплитуд для процессов дифотонного рождения

При расчетах без учета фрагментации использовался известный квадрат матричного элемента для дифотонного рождения [36] в модели МЦС:

$$|\bar{M}^2|_{q+\bar{q} \rightarrow \gamma+\gamma} = \frac{32}{3} \pi^2 e_q^4 \alpha^2 \left(\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) \quad (43)$$

Учет фрагментации требует учета всех подпроцессов, в которых два конечных кварка мо-

гут фрагментироваться в фотон. Для всех этих процессов использовались известные квадраты амплитуды [37]:

$$|\bar{M}^2|_{g+g \rightarrow q+\bar{q}} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{1}{6} \left(\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) - \frac{3\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{8\hat{t}^2} \right) \quad (44)$$

$$|\bar{M}^2|_{q_a+q_b \rightarrow q_a+q_b} = |\bar{M}^2|_{q_a+\bar{q}_b \rightarrow q_a+\bar{q}_b} = |\bar{M}^2|_{\bar{q}_a+\bar{q}_b \rightarrow \bar{q}_a+\bar{q}_b} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{4\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{9\hat{t}^2} \right) \quad (45)$$

$$|\bar{M}^2|_{q_a+q_b \rightarrow q_b+q_a} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{4\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{9\hat{u}^2} \right) \quad (46)$$

$$|\bar{M}^2|_{q_a+q_a \rightarrow q_a+q_a} = |\bar{M}^2|_{\bar{q}_a+\bar{q}_a \rightarrow \bar{q}_a+\bar{q}_a} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}^2} \right) - \frac{8\hat{s}^2}{27\hat{t}\hat{u}} \right) \quad (47)$$

$$|\bar{M}^2|_{q_a+\bar{q}_a \rightarrow q_a+\bar{q}_a} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{s}^2} \right) - \frac{8\hat{u}^2}{27\hat{t}\hat{s}} \right) \quad (48)$$

$$|\bar{M}^2|_{q_a+\bar{q}_a \rightarrow q_b+\bar{q}_b} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{s}^2} \right) \right) \quad (49)$$

5.3 Результаты расчетов

Были проведены расчеты дифференциальных сечений прямого дифотонного рождения без учета фрагментации в КПМ:

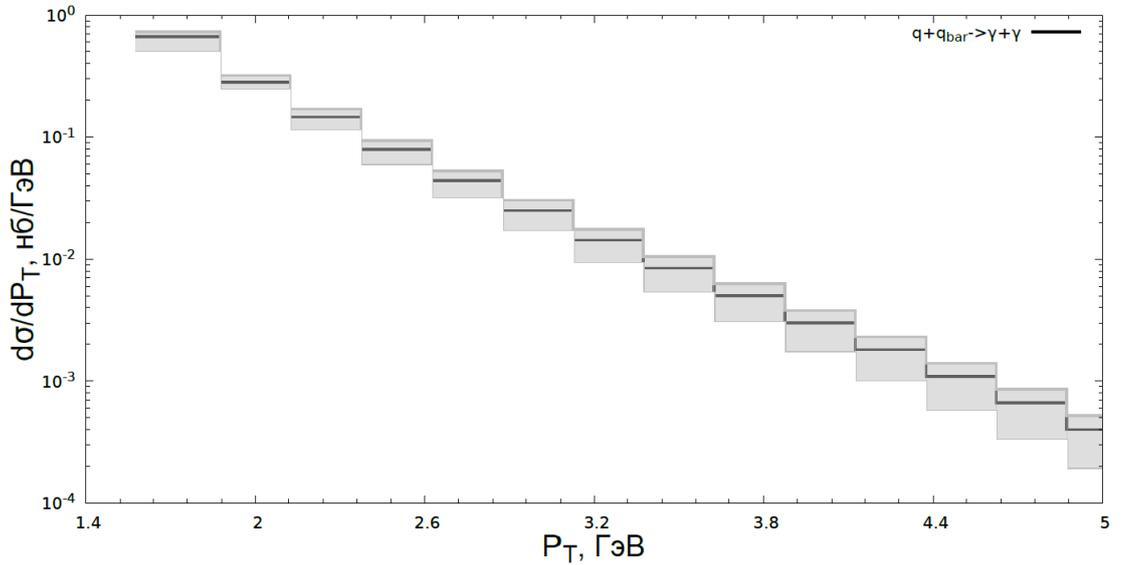


Рис. 12: Дифференциальное сечение по поперечному импульсу одного фотона $\frac{d\sigma}{dp_T}$ для γ -квантов в КПМ, $|y| < 3$, $1.4 < p_T < 6$ [ГэВ]

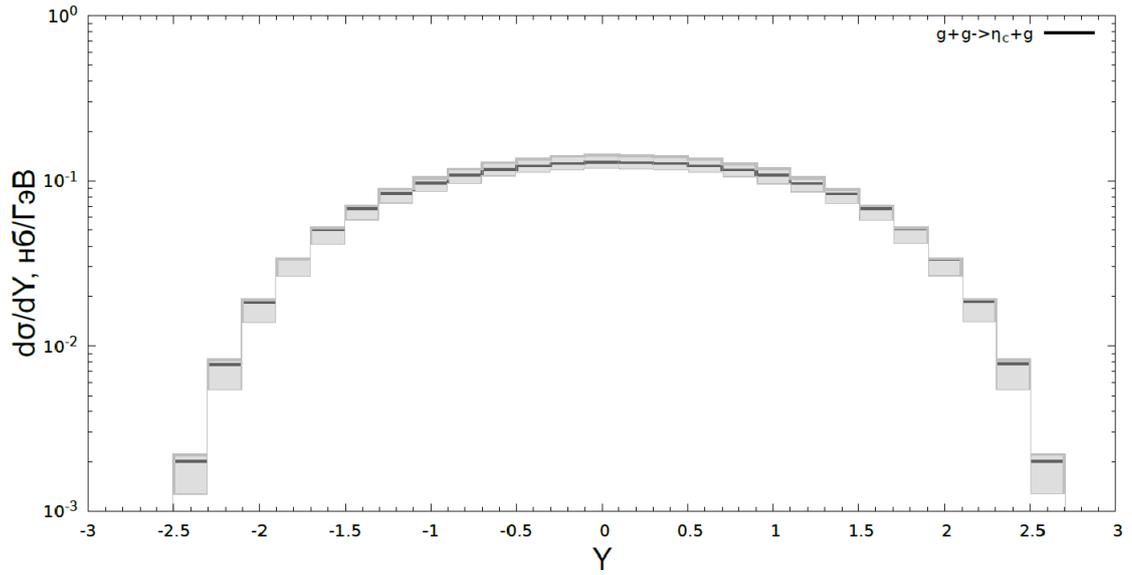


Рис. 13: Дифференциальное сечение по быстроте одного фотона $\frac{d\sigma}{dy}$ для γ -квантов в КПМ

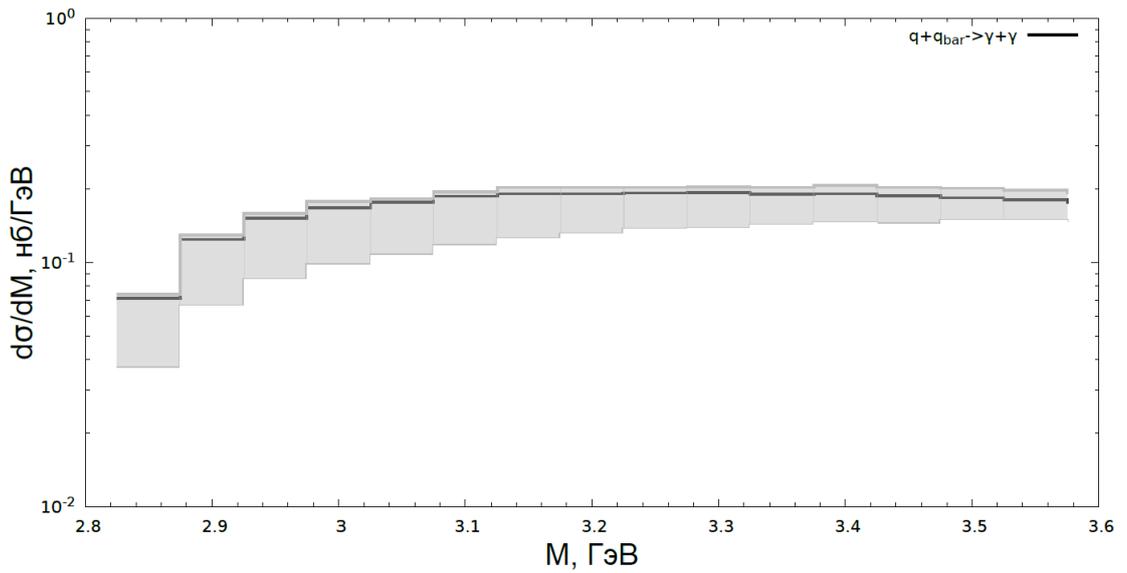


Рис. 14: Дифференциальное сечение по инвариантной массе двух фотонов $\frac{d\sigma}{dM}$ для γ -квантов в КПМ

В ОПМ была выполнена проверка возможности перехода из модели ОПМ к КПМ путем уменьшения параметра $\langle q_T^2 \rangle$

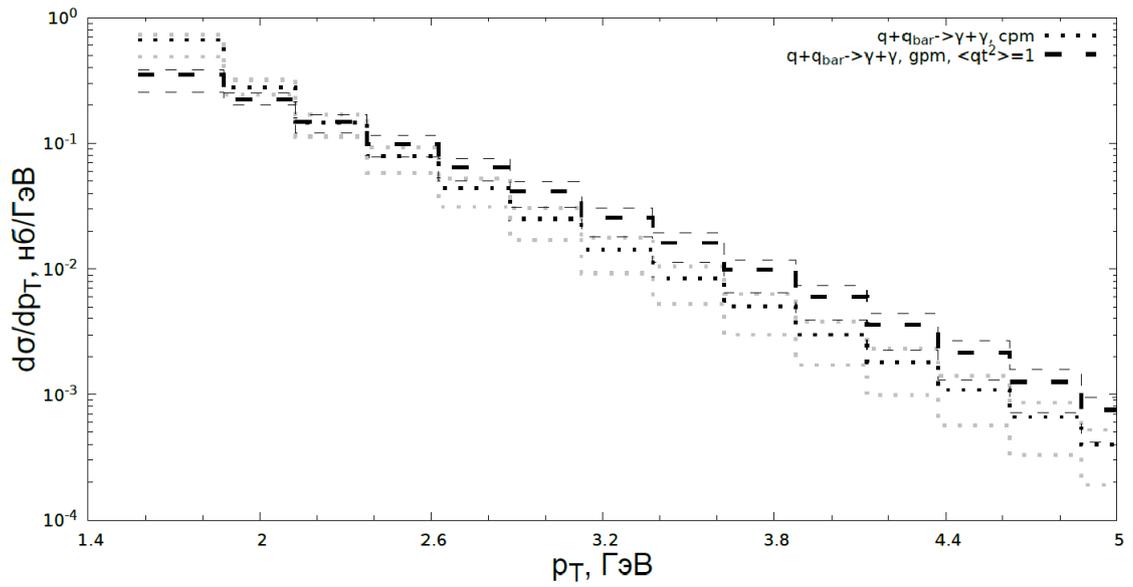


Рис. 15: Сравнение дифференциальных сечений по поперечным импульсам одного фотона $\frac{d\sigma}{dp_T}$ для γ -квантов в КПМ и ОПМ

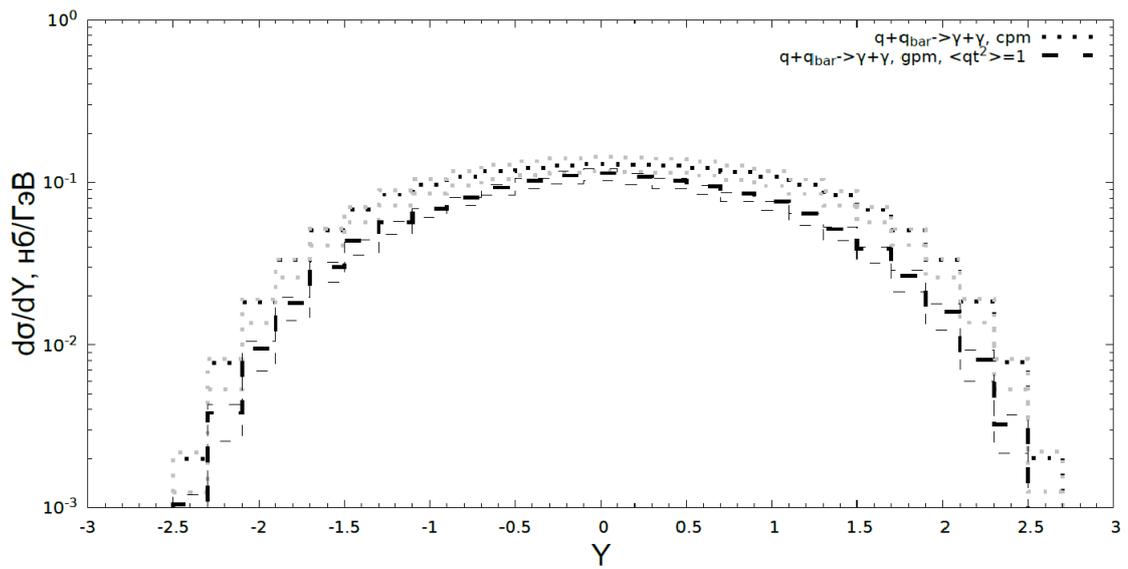


Рис. 16: Сравнение дифференциальных сечений по быстроте одного фотона $\frac{d\sigma}{dy}$ для γ -квантов в КПМ и ОПМ

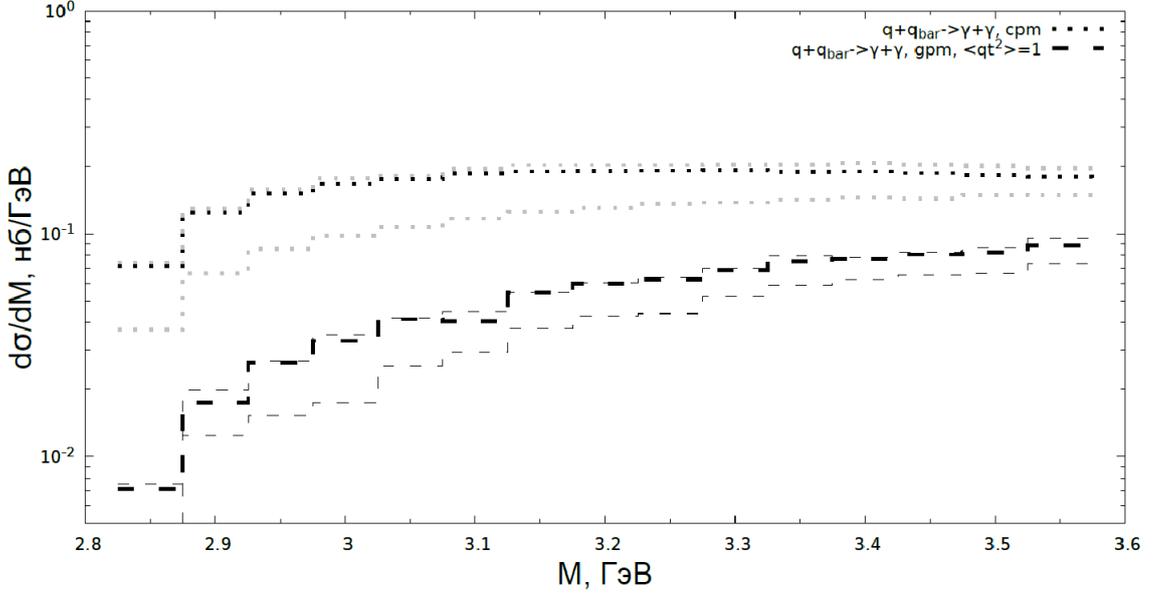


Рис. 17: Сравнение дифференциальных сечений по инвариантной массе двух фотонов $\frac{d\sigma}{dM}$ для γ -квантов в КПМ и ОПМ

6 Рождение фотонов в распадах η_c -мезонов на коллайдере NICA

Для оценки возможности наблюдения пика η_c -мезона в сечении по инвариантной массе $\frac{d\sigma}{dM}$ на фоне всевозможных вкладов рождения прямых фотонов строится картина сигнал-фон. Смысл построения этой картины - явное отделение нужных фотонов от распада рожденного чармония от более многочисленных нечармониевых вкладов дифотонного рождения.

В качестве фона строятся сечения по инвариантной массе двух фотонов $\frac{d\sigma}{dM}$ от вкладов рождения прямых, и, если необходимо, не прямых фотонов. Для построения пика сечения по инвариантной массе двух фотонов для η_c -мезона необходимо преобразовать определенным образом.

6.1 Построение квадрата амплитуды процесса $gg \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma\gamma$

Конечными частицами полного процесса должны являться фотоны, на которые имеются экспериментальные ограничения, т.е. необходимо сразу рассчитать полное сечение процесса дифотонного рождения из распада η_c -мезона, порожденного протонным столкновением без возможности "размазки" каким-либо распределением. Для этого необходимо построить квадрат амплитуды полного процесса. [38]

Амплитуду для процесса $gg \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma\gamma$ можно составить с помощью амплитуд процессов $\eta_c \rightarrow \gamma + \gamma$ и $\eta_c \rightarrow g + g$, первая из которых записывается так:

$$M = A^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \quad (50)$$

здесь $\varepsilon_\mu^*(k_i)$ - вектора поляризации вылетающих фотонов, k_i - 4-импульсы фотонов, а $A^{\mu\nu}$ - тензор второго ранга, выражающийся через импульсы конечных частиц и константы распада

$f_{\gamma\gamma}$

$$A^{\mu\nu} = f_{\gamma\gamma} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta$$

Аналогично можно записать амплитуду для процесса $\eta_c \rightarrow g + g$

$$A^{\mu\nu} = f_{gg} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_1^\alpha q_2^\beta \quad (51)$$

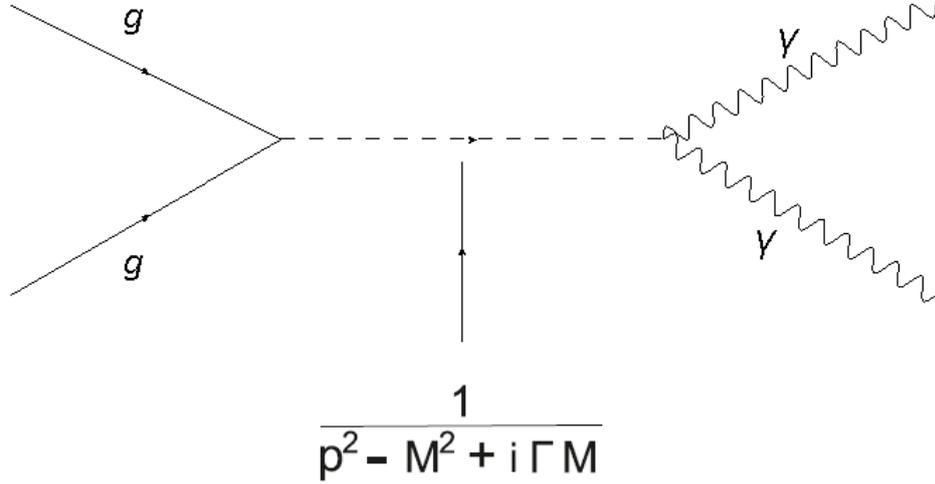


Рис. 18: Диаграмма Фейнмана для процесса $gg \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma\gamma$

Тогда, следуя рис. (20), общую амплитуду можно записать с помощью релятивистского пропагатора нестабильной частицы в виде

$$A^{\alpha\beta\mu\nu} = f_{gg} f_{\gamma\gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\alpha'\beta'} q_1^{\alpha'} q_2^{\beta'} \frac{i}{p^2 - M^2 + iM\Gamma} \varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} k_1^{\mu'} k_2^{\nu'} \quad (52)$$

где q_1, q_2 - импульсы начальных глюонов, k_1, k_2 - импульсы конечных фотонов, а $f_{gg}, f_{\gamma\gamma}$ - константы распада η_c -мезона в два глюона и в два фотона соответственно.

Находятся константы распада через известные выражения для ширин распада, записав общий вид дифференциала ширины распада

$$d\Gamma_i = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \frac{|\bar{A}_i|^2}{2M} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}} \quad (53)$$

где $d\Gamma_i$ и $|\bar{A}_i|^2$ - ширина и квадрат амплитуды соответствующего процесса распада.

Тогда можно выразить:

$$\Gamma_i = \frac{|\bar{A}_i|^2}{16\pi M}$$

а также использовать известные квадраты амплитуд для соответствующих процессов в формулах ширин распада, найденных в модели МЦС

$$\Gamma(\eta_c \rightarrow \gamma\gamma) = 12e_c^4 \alpha^2 \frac{|R(0)|^2}{M^2} \quad (54)$$

$$\Gamma(\eta_c \rightarrow gg) = \frac{2}{9} \alpha_s^2 \frac{|R(0)|^2}{M^2} \quad (55)$$

можно найти

$$f_{\gamma\gamma} = \frac{96}{M^3} e^4 \alpha^2 \sqrt{\frac{\pi}{M}} |R(0)|^2 \quad (56)$$

$$f_{gg} = \frac{16}{9M^3} \alpha_s^2 \sqrt{\frac{\pi}{M}} |R(0)|^2 \quad (57)$$

Итоговый квадрат амплитуды тогда:

$$|\bar{M}|^2 = \frac{1}{256} \frac{M_0^8 f_{\gamma\gamma}^2 f_{gg}^2}{4(M^2 - M_0^2)^2 + M_0^2 \Gamma^2} \quad (58)$$

6.2 Результаты расчетов

Расчетная формула дифференциального сечения для процесса $g + g \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma + \gamma$ с учетом квадрата амплитуды (58):

$$d\sigma = \frac{1}{8\pi} \int_0^1 dx_1 \int_0^\infty dq_{1T} \int_0^\infty dq_{2T} \int_0^{2\pi} d\phi_2 F(x_1, |q_{1T}|^2, \mu) F(\tilde{x}_2, |q_{2T}|^2, \mu) \times \\ \times \int \frac{M_0^8 f_{\gamma\gamma}^2 f_{gg}^2}{256 x_1 \tilde{x}_2 S(4(M^2 - M_0^2)^2 + M_0^2 \Gamma^2)} \frac{q_{1T} q_{2T} q_{3T} \theta(1 - \tilde{x}_2) \theta(\tilde{x}_2)}{|f'(x_1, \tilde{x}_2, q_{1T}^2, q_{2T}^2)|} d\phi_3 dy_3 dq_{3t} \quad (59)$$

По данной формуле был построен график в обобщенной партонной модели, где в качестве фона выбрана сумма вкладов от прямого дифотонного рождения с учетом фрагментации и без нее:

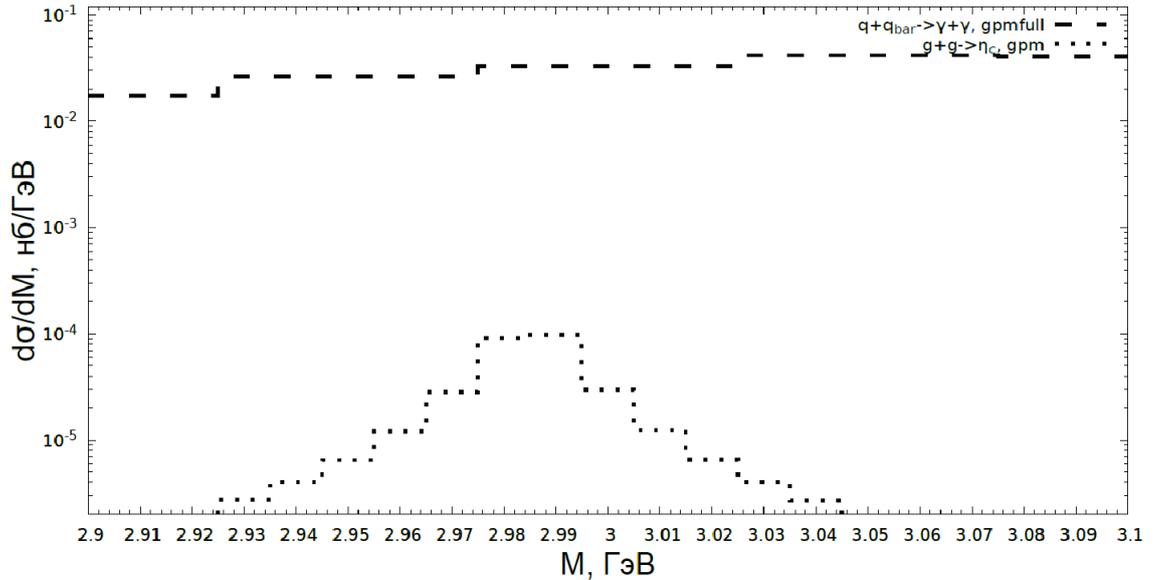


Рис. 19: Отношение сигнал-фон с учетом квадрата амплитуды процесса $gg \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma\gamma$, $|y| < 3$, $1.4 < p_T < 6$ [ГэВ]

7 Рождение фотонов в распадах π^0 -мезонов

Фоновые фотоны могут образовываться не только прямым образом. Один из вариантов образования не прямых фотонов - через распад частицы, отличающейся от η_c -мезона. Одной из частиц, вносящих наибольший вклад, является π^0 -мезон. Время жизни этой частицы $\tau_{\pi^0} = (8.52 \pm 0.18) \cdot 10^{-17}$ [39], что делает ее более чем в миллион раз менее долгоживущей, чем заряженные частицы из семейства пионов ($\tau_{\pi^\pm} = (2.6033 \pm 0.0005) \cdot 10^{-8}$ с). По этой причине распадается она очень быстро и в подавляющем большинстве случаев на фотоны, о чем говорит ее брэнчинг $Br(\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma) = 98.9\%$

7.1 Фрагментационное рождение π^0 -мезонов и подпроцессы

Описание рождения нейтрального пиона математически немного отличается, т.к. эта частица является результатом не самого партонного подпроцесса, а фрагментации, происходящей с конечными частицами после него. π^0 -мезон может быть рожден после подпроцесса взаимного рассеяния легких кварков (u и d), их антикварков и глюонов в результате фрагментации.

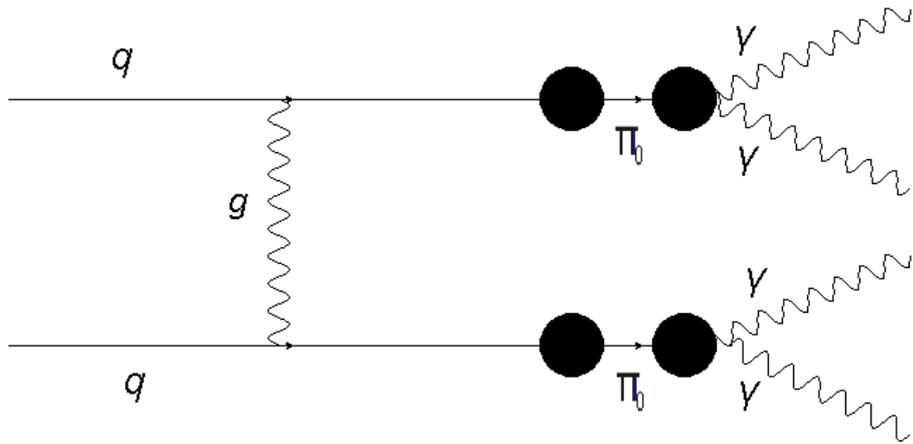


Рис. 20: Схематичное изображение кваркового рассеяния с фрагментацией в пион

В данной работе из-за экспериментальных ограничений рассматриваются фотоны с поперечными импульсами $p_T > 2 \gg \frac{m_{\pi^0}}{2} = 0.07[\text{ГэВ}]$. По этой причине считается, что оба фотона, которые рождаются при распаде пиона, имеют одинаковую проекцию поперечного импульса, равную половине p_T π^0 -мезона. Предлагается считать, что обе конечных частицы партонного подпроцесса превращаются в пион и при построении сечения по инвариантной массе двух фотонов выбирать по одному фотону из пар, родившихся от разных конечных пионов.

Функция фрагментации в пион для u -кварка находится из системы:

$$\begin{cases} D_u^{\pi^0}(z) = \frac{1}{2} \left(D_u^{\pi^+}(z) + D_u^{\pi^-}(z) \right) \\ zD_u^{\pi^+}(z) = a\sqrt{z}(c-z) + \xi_\pi(1-z)^2 \\ zD_u^{\pi^-}(z) = \xi_\pi(1-z)^2 \\ a = \frac{9}{40}, b = \frac{9}{80}, c = \frac{11}{9}, \xi_\pi = \frac{61}{125} \end{cases} \quad (60)$$

Функция фрагментации глюона в пион:

$$D_{g \rightarrow \pi_0}(z) = \frac{1}{2z}(1-z)^{1.5} \quad (61)$$

Для расчета пионного рождения нужно учитывать все подпроцессы с конечными кварками и глюонами, т.е. к амплитудам (44-49) необходимо добавить еще несколько:

$$|\bar{M}^2|_{g+g \rightarrow g+g} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{9}{2} \left(3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right) \right) \quad (62)$$

$$|\bar{M}^2|_{q+\bar{q} \rightarrow g+g} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(\frac{32}{27} \left(\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) - \frac{8}{3} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \quad (63)$$

$$|\bar{M}^2|_{g+q \rightarrow g+q} = |\bar{M}^2|_{g+\bar{q} \rightarrow g+\bar{q}} = 16\pi^2\alpha_s^2 \left(-\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right) + \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right) \quad (64)$$

7.2 Результаты расчетов

Были проведены расчеты дифференциального сечения по поперечному импульсу инклюзивного рождения π_0 -мезона в КПМ при параметрах коллайдера NICA.

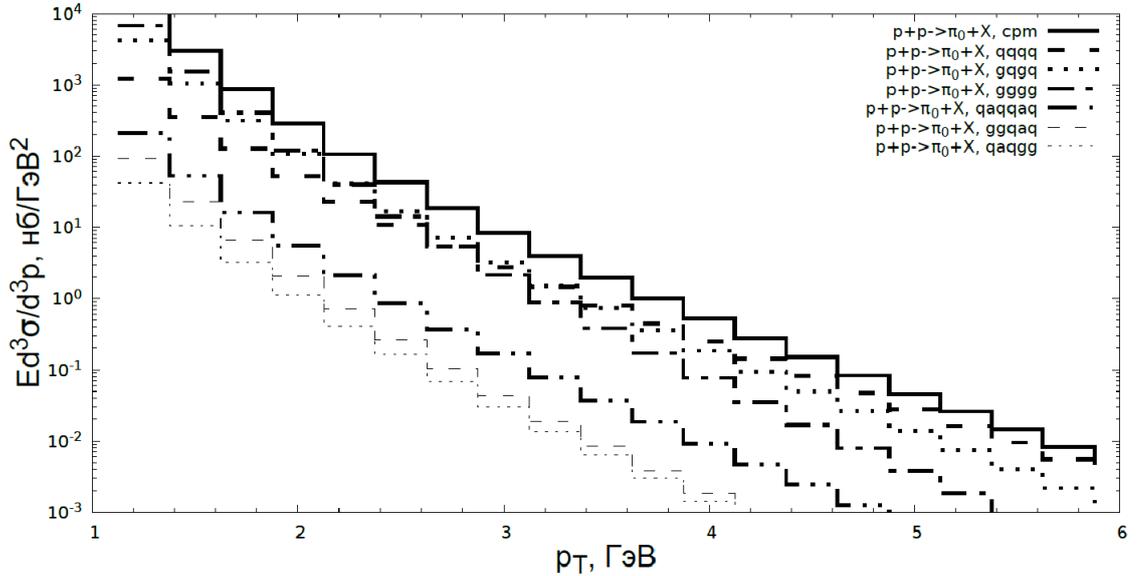


Рис. 21: Процесс инклюзивного рождения π_0 -мезона и его вклады в КПМ, $|y| < 3$, $1 < p_T < 6$ [ГэВ]

На рис. 18 построено инвариантное сечение $E \frac{d^3\sigma}{d^3p} = \frac{d\sigma}{2\pi p_T dp_T dy}$. Можно наблюдать вклады разных подпроцессов. Интересно, что подпроцессы $qq \rightarrow qq$, $gq \rightarrow gq$ и $gg \rightarrow gg$ явно являются преимущественными, причем на больших p_T доминирует кварковый подпроцесс, а на малых он становится ниже обоих "конкурентов". Обратная ситуация наблюдается у чисто глюонного процесса, который доминирует на малых поперечных импульсах, а на больших спадает быстрее основных вкладов.

Было также построено соотношение сигнал-фон в ОПМ, в котором помимо всевозможных вкладов фоновых прямых фотонов учитывались фотоны и от распада пионов.

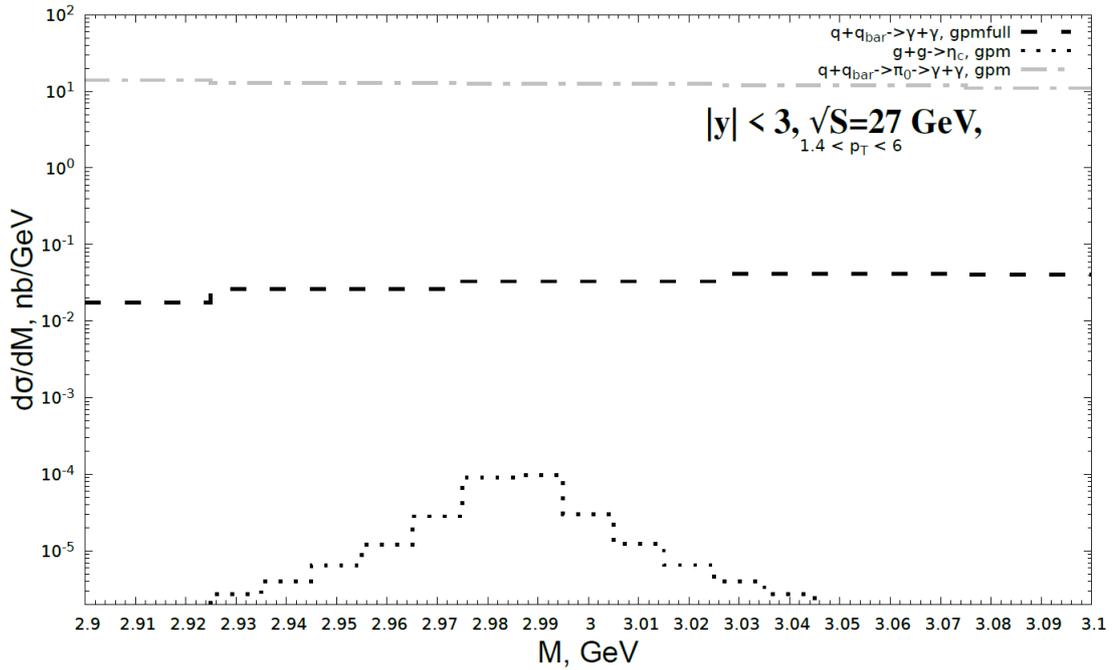


Рис. 22: Сигнал-фон с учетом всевозможных вкладов фоновых фотонов, $|y| < 3$, $1.4 < p_T < 6$ [ГэВ]

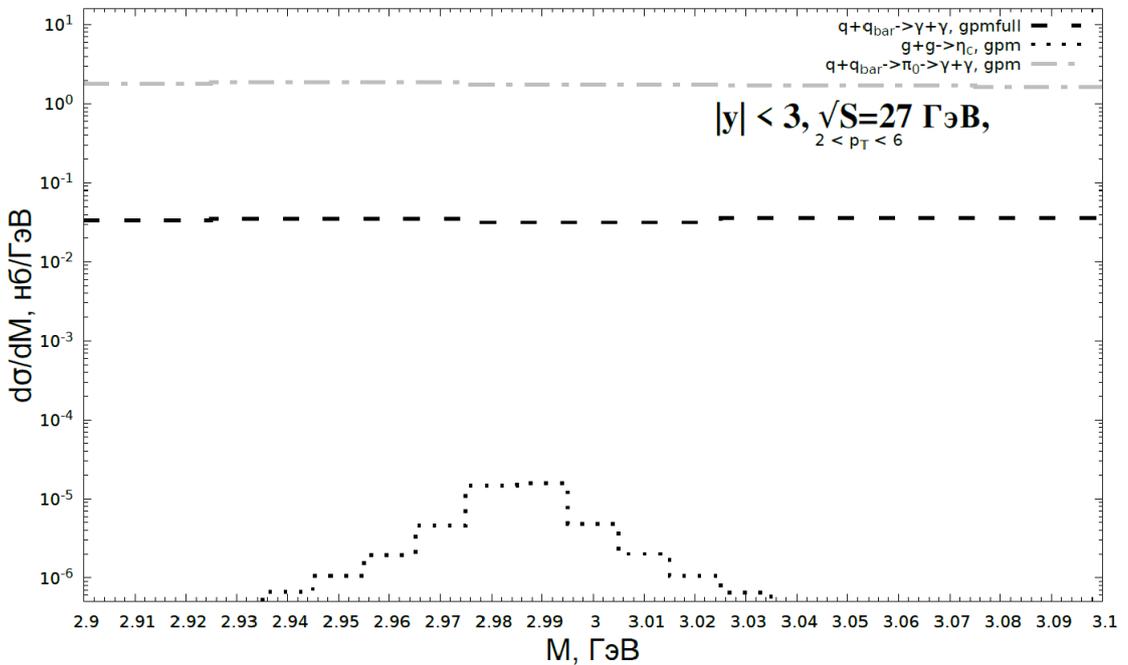


Рис. 23: Сигнал-фон с учетом всевозможных вкладов фоновых фотонов, $|y| < 3$, $2 < p_T < 6$ [ГэВ]

При изменении нижней границы на поперечный импульс с $p_{Tmin} = 1.5$ на $p_{Tmin} = 2$ сигнал и пионный фон уменьшаются на порядок, что говорит о важности аккуратного подбора экспериментальных ограничений.

Можно наблюдать, что фон от распада пионов значительно выше фона прямых фотонов, что подтверждает тезис о высокой вероятности распада многочисленных пионов.

Видно, что при данных предсказаниях отношение $\frac{\text{сигнал}}{\text{фон}} \simeq 10^{-3}$, поэтому можно сделать вывод о невозможности наблюдения фотонов от распада новородившегося η_c -мезона на фоне всевозможных процессов дифотонного рождения и фотонов от распада π_0 -мезонов в эксперименте с параметрами NICA.

Заклучение

В данной ВКР получена аналитическая формула для расчета дифференциального сечения для процессов рождения прямых фотонов и η_c -мезонов в партонных взаимодействиях в рамках КПМ и ОПМ.

Получены предсказания величин дифференциальных сечений для дифотонного рождения и для рождения η_c -мезона при параметрах коллайдера NICA.

Также построена картина сигнал-фон для эксперимента NICA и по ней сделан вывод о невозможности наблюдения пика η_c -мезона в сечении по инвариантной массе $\frac{d\sigma}{dM}$ на фоне всевозможных вкладов рождения прямых фотонов на эксперименте с параметрами коллайдера NICA.

Однако, необходимо отметить, что если в качестве величины ограничивающей вклад мягких фотонов, которые не измеряются в эксперименте, использовать не поперечный импульс фотонов, а их энергию, то отношение сигнал-фон может увеличиться. Такой анализ также планируется провести.

Определения, обозначения и сокращения

Сокращения:

ANKE-COSY – Apparatus for Studies of Nucleon and Kaon Ejectiles;
NICA – Nuclotron-based Ion Collider fAcility;
SPD – Spin Physics Detector;
RHIC – Relativistic Reavy Ion Collider;
LHCb - Large Hadron Collider beauty experiment
ГНР - ГлубокоНеупругое Рассеяние
КПМ (СРМ) – Коллинеарная Партонная Модель;
ОПМ (GPM) - Обобщенная Партонная Модель;
КХД – Квантовая ХромоДинамика;
КЭД – Квантовая ЭлектроДинамика;
КТП - Квантовая Теория Поля;
ПФР – Партонные Функции Распределения;
СЦМ – Система Центра Масс.
МЦС - Модель Цветовых Синглетов
МИЦ - Модель Испарения Цвета)
НРКХД - НеРелятивистская Квантовая ХромоДинамика

Обозначения исходных объектов (с указанием размерности физических величин в системе $\hbar = c = 1$, дополненной системой СГС):

σ [см²] — сечение процесса;
 y [безразмерная] — быстрота;
 P [ГэВ] — 4-импульс протона;
 x [безразмерная] — доля импульса протона, уносимая партоном;
 $q \equiv (q_0, \vec{q}_t, q_z)$ [ГэВ] — 4-импульс партона;
 $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ [ГэВ²] — переменные Мандельстама;
 \sqrt{S} [ГэВ] — полная энергия взаимодействия в СЦМ протонов;
 m [ГэВ] — масса партона;
 μ [ГэВ] — жесткий масштаб;
 f_i — ПФР;

Список используемой литературы

- [1] Spin Physics at the NICA Collider // Spin Physics Detector URL: <http://www.jinr.ru/posts/spin-physics-at-the-nica-collider/>
- [2] Kacharava, A., Chiladze, D., Chiladze, B., Keshelashvili, Irakli, Lomidze, Nodar, Macharashvili, Giorgi, Mchedlishvili, David, Nioradze, M., Rathmann, Frank, Stroher, H., Wilkin, C., Neutron-proton scattering experiments at ANKE-COSY // The European Physical Journal Conferences. - 2010;
- [3] F. Hibou, O. Bing, M. Boivin, P. Courtat, R. Gacougnolle, Y. Le Bornec, J.M. Martin, F. Plouin, B. Tatischeff, C. Wilkin, N. Willis, R. Wurzinger, Near-Threshold Production of omega Mesons in the $pp \rightarrow pp\omega$ Reaction // Phys.Rev.Lett.. - 199. - №83. - С. 492-495;
- [4] A. Franz, Five Years of Tracking Heavy Ion Collisions at RHIC // Nucl.Instrum.Meth. - 2006. - A566. - С. 54-61;
- [5] A. Arbuzov, A. Bacchetta, M. Butenschoen et al., On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD // Progress in Particle and Nuclear Physics. - 2021. - 103858. - С. 1–43
- [6] Ф. Мартин А. Кварки и лептоны: введение в физику частиц: Пер. с англ.. - М.: Мир, 1987. - 456 с;
- [7] The Nobel Prize in Physics 1984 // The Nobel Prize URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1984/summary/>
- [8] Tevatron scientific talks on Higgs search results // Fermilab Today URL: https://www.fnal.gov/pub/today/archive/archive_2012/today12-07-02.html
- [9] C. Quigg, J. L.Rosner, Quantum mechanics with applications to quarkonium, physics reports (Review Section of Physics Letters) 56, No. 4 (1979) 167-235. North-Holland Publishing Company
- [10] М. Пескин, Д. Шредер, Введение в квантовую теорию поля. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 201. - 784 с;
- [11] J. Collins, Foundations of Perturbative QCD (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, 32) Cambridge University Press (Cambridge, UK, 2011).
- [12] R. Angeles-Martinez et al. Transverse Momentum Dependent (TMD) parton distribution functions: status and prospects, Acta Phys. Polon. B 46 (2015) 2501
- [13] L. Gribov, E. Levin, M.Ryskin, Semihard Processes in QCD // Phys. Rept. — 1983. — Vol. 100. — Pp. 1–150.

- [14] J. Collins, D. Soper, G. Sterman Factorization for Short Distance Hadron - Hadron Scattering// Nucl. Phys. B. 1985. V.261. - P. 104–142
- [15] R. Ellis, W. Stirling, B. Webber, QCD and Collider Physics// Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1996.
- [16] A Buras, Asymptotic freedom in deep inelastic processes in the leading order and beyond // Rev. Mod. Phys., 52, 199 (1980)
- [17] В. Хандрамай, О Соловцова, В. Г. Тепляков, Правило сумм Гросса–Ллевеллина Смита: вклады высших твистов // ПФМТ, 2012, № 1(10), 46–50
- [18] Ф. Индурайн, Квантовая хромодинамика. Введение в теорию кварков и глюонов: Пер. с англ.. - М.: Мир, 1986. - 288 с;
- [19] A. Martin, W. Stirling, R. Thorne and G. Watt, Parton distributions for the LHC, Eur. Phys. J. C 63 (2009) 189-285
- [20] Е. Бюклинг, К Каянти. Кинематика элементарных частиц: Пер. с англ.. - М.: Мир, 1975. - 343 с;
- [21] A. Karpishkov, V. Saleev, M. Nefedo, Estimates for the single-spin asymmetries in the $p \uparrow p \rightarrow J/\psi X$ process at PHENIX RHIC and SPD NICA // Phys.Rev.D 104 (2021) 1, 016008
- [22] Ji Xiangdong, Generalized Parton Distributions// Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 54 (2004) - P. 413-450
- [23] Ch.-Y. Wong, H. Wang, Effects of parton intrinsic transverse momentum on photon production in hard-scattering processes // Phys. Rev. C 58, 376 (1998)
- [24] C. Carlson and R. Suaya, Hadronic production of the ψ/J meson // Phys. Rev. D 14, 3115 (1976)
- [25] Y. Ma and R. Vogt, Quarkonium production in an improved color evaporation model // Phys. Rev. D 94,114029 (2016)
- [26] G. Bodwin, E. Braaten, and G. Lepage, Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // Phys. Rev. D 51, 1125 (1995).
- [27] R. Gastmans, W. Troost, T.T. Wu, Cross-sections for gluon + gluon \rightarrow heavy quarkonium + gluon// Phys. Lett. B 184 (1987) 257
- [28] E. Eichten, C. Quigg, Quarkonium wave functions at the origin: an update // FERMILAB–PUB–19/176–T
- [29] B. Kniehl, D. Vasin, V. Saleev, Charmonium Production at High Energy in the k_T -Factorization Approach // Phys. Rev. D 73, 074022 (2006)
- [30] Х. Гулд, Я. Тобочник, Компьютерное моделирование в физике:[В 2 Т.]: Пер. с англ.. - М.: Мир, 1990. - 399 с - Т.2;

- [31] И. Соболев, Численные методы Монте-Карло: - М.: Наука, 1973. - 312 с;
- [32] T. Hahn, CUBA: a library for multidimensional numerical integration // Comput. Phys. Commun. 168 (2005) 78–95
- [33] A. Metz, A. Vossen, Parton Fragmentation Functions // Progress in Particle and Nuclear Physics (2016) pp. 136-202
- [34] J. Collins, D. Soper, Parton distribution and decay functions // Nucl. Phys. B. 1982. V.194. - P. 445-492
- [35] J. Owens, E. Reya, M. Glück, Detailed quantum-chromodynamic predictions for high- p_T processes // Phys. Rev. D 18, 1501 (1978)
- [36] M. Nefedov, V. Saleev, Diphoton production at the Tevatron and the LHC in the NLO approximation of the parton Reggeization approach // Phys. Rev. D 92, 094033 (2015)
- [37] E. Berger, E. Braaten, R. Field, Large- p_T production of single and double photons in proton-proton and pion-proton collisions // Nucl. Phys. B. 1984. V.239. - P. 52-92
- [38] F. Maltoni, M. Mangano, and A. Petrelli, Quarkonium Photoproduction at Next-to-leading Order // Nucl. Phys. B519, 361 (1998).
- [39] M. Tanabashi et al., Review of Particle Physics // Phys. Rev. D 98, 030001(2018)